§ 3.1.1 费马（Fermat）引理

【定义】设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, $x_0 \in (a,b)$. 若存在 x_0 的一个领域 $U(x_0)$, 使得

$$f(x) \le f(x_0) \;(f(x) \ge f(x_0)) \quad \forall\, x \in U(x_0),$$

则称 f 在 x_0 取得**极大（小）值**,

称 x_0 是 $f(x)$ 的一个**极大（小）值点**.

极大值（点）、极小值（点）统称为**极值（点）**.

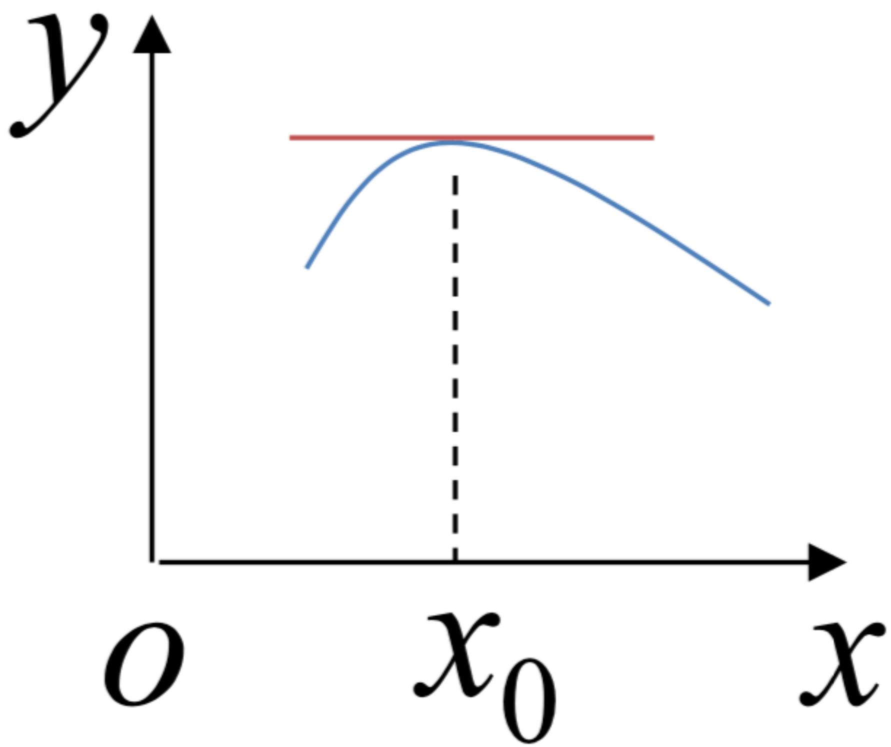
【注】1. 极值是**局部性概念**.

2. 在一个区间内, $f(x)$ 的**一个极小值可能大于一些极大值**, **可能有无数个极值点**, 也**可能没有极值点**.

【费马（Fermat）引理】

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{在}\ x_0\ \text{取得极值} \\ f(x)\ \text{在}\ x_0\ \text{可导} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

【几何意义】若 $f(x)$ 在极值点可导，则在该点的切线平行于 x 轴.



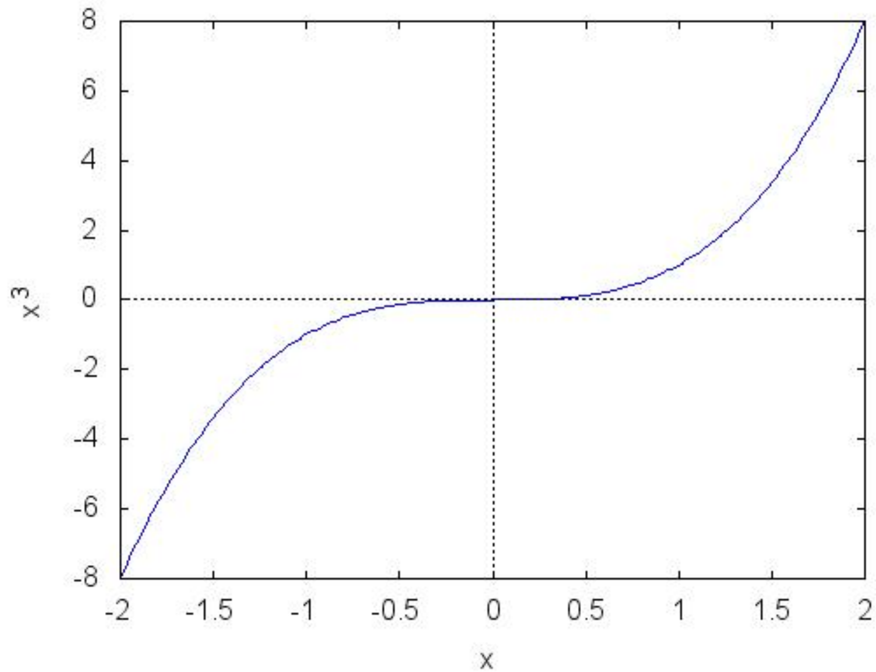
【**定义**】称满足方程 $f'(x)=0$ 的点为 $f(x)$ 的**驻点**（或**稳定点**、**临界点**）.

【**注**】当 $f(x)$ 可导时,

$$x_0\ \textbf{为}\ f(x)\ \textbf{的极值点} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(x_0)=0$$

【**反例**】对函数 $f(x)=x^3$,

点 $x=0$ 是驻点，但却不是极值点

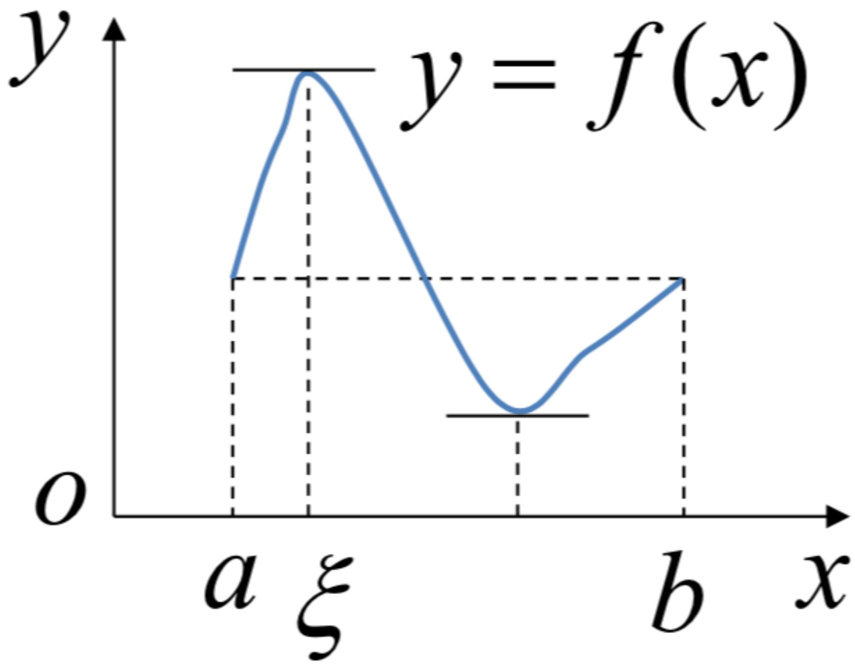


§ 3.1.2 罗尔（Rolle）定理

【罗尔（Rolle）定理】

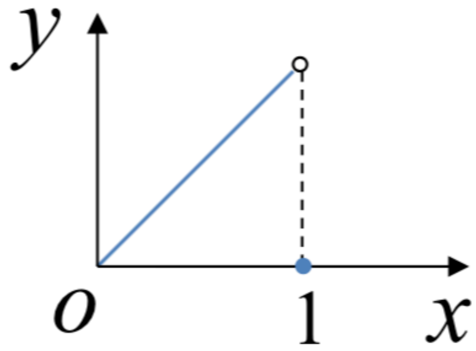
$$\left.\begin{array}{l} f(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 上连续} \\ f(x)\text{ 在 }(a,b)\text{ 内可导} \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{存在 }\xi\in(a,b)\text{ 使得} \\ f'(\xi)=0\end{array}$$

【几何意义】在每一点（端点除外）都可导的一段连续曲线，如果曲线**两端点高度相等**，则**至少存在一条水平切线**.



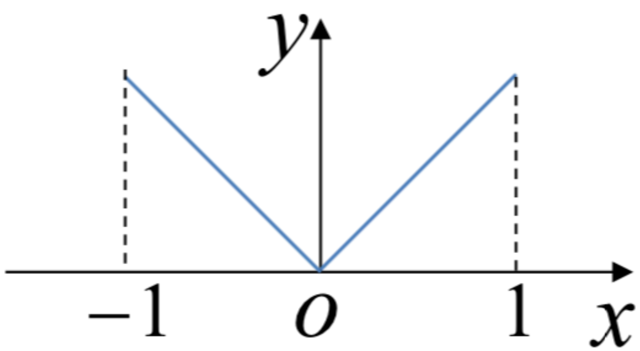
【注】罗尔定理的条件缺一不可.

例如,
$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$



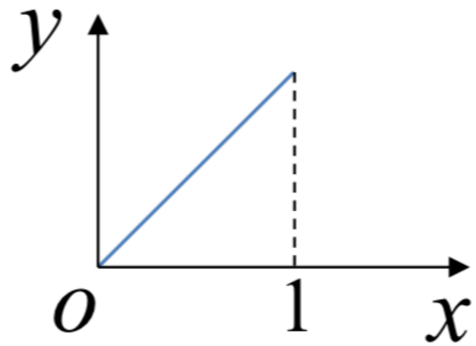
$f(x)=|x|$

$x\in[-1,1]$



$f(x)=x$

$x\in[0,1]$



【注】定理的条件是充分的. 罗尔定理可推广为

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\text{ 在 }(a,b)\text{ 内可导} \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{存在 }\xi\in(a,b)\text{ 使得} \\ f'(\xi)=0\end{array}$$

【证明提示】令

$$F(x) := \begin{cases} f(a^+), & x = a, \\ f(x), & a < x < b, \\ f(b^-), & x = b\,. \end{cases}$$

证明 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件.

【**注**】罗尔定理给出了驻点的存在性, 但没有唯一性, 也没有确切值. 如,

$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理的条件. 但

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin^2\dfrac{1}{x}-x^2\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

存在无限多个零点 $c_n=(2n\pi)^{-1}$ $(n\in\mathbb{Z})$.

【例 1.2】求 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的驻点的所在区间.

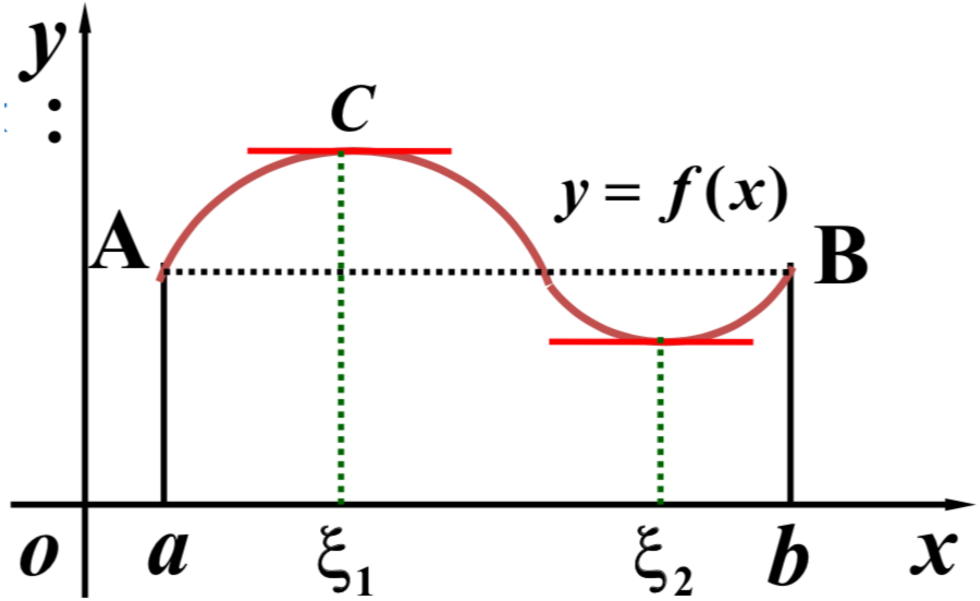
【例 1.3】若 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3),\quad a<x_1<x_2<x_3<b\,.$$

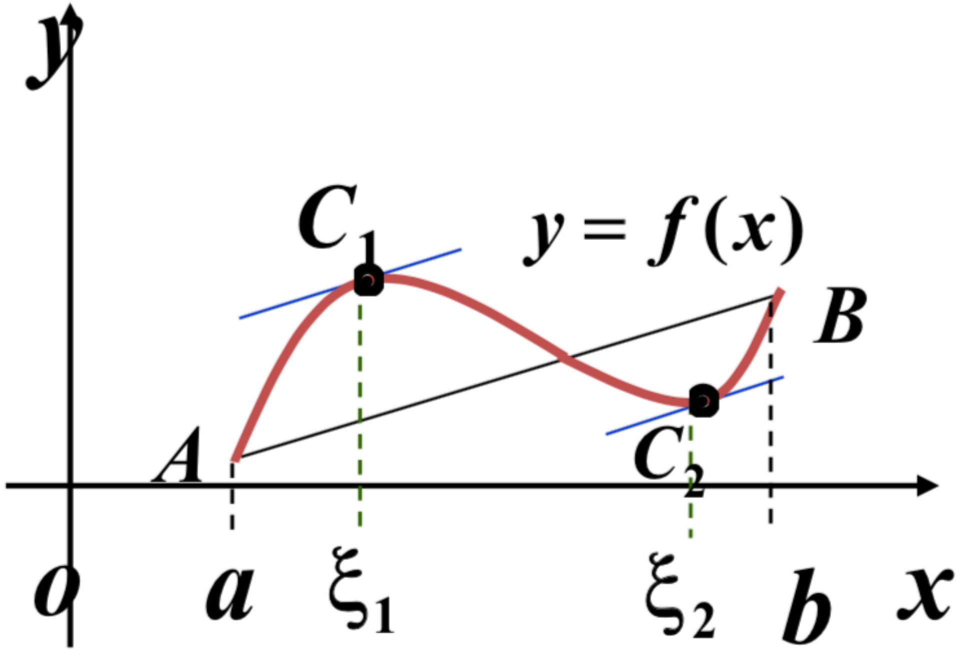
试证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

§ 3.1.3 拉格朗日中值定理

$$f(a) = f(b)$$



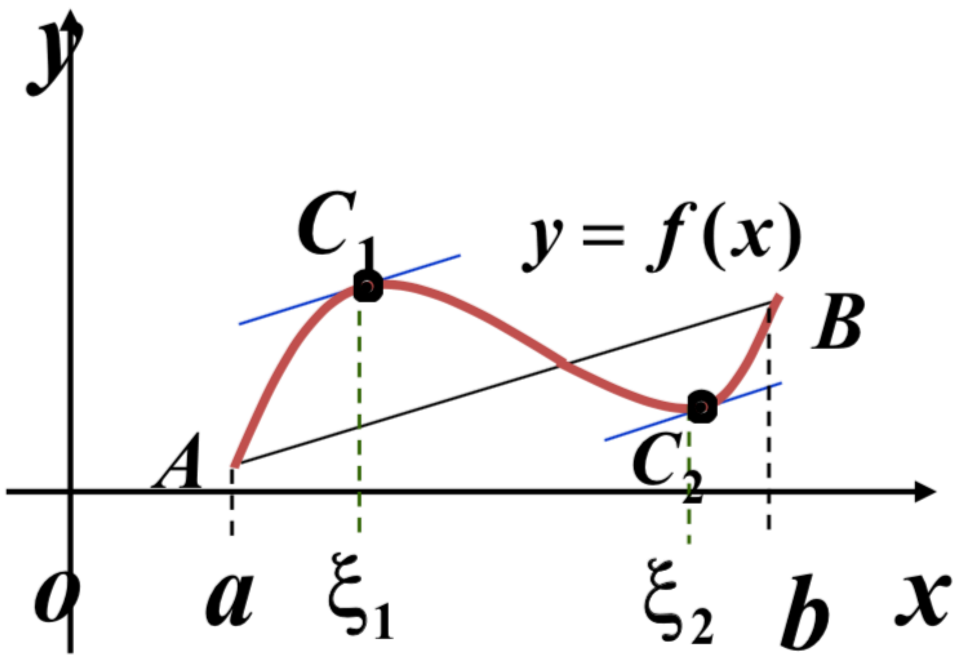
$$f(a) \neq f(b)$$



【拉格朗日（Lagrange）中值定理】

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 上连续} \\ f(x)\text{ 在 }(a,b)\text{ 内可导} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{存在 }\xi\in(a,b)\text{ 使得} \\ f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{array}$$

【几何意义】 在满足定理条件的曲线段 AB 上至少有一点 C, 在该点处的切线平行于弦 $\overline{AB}$.



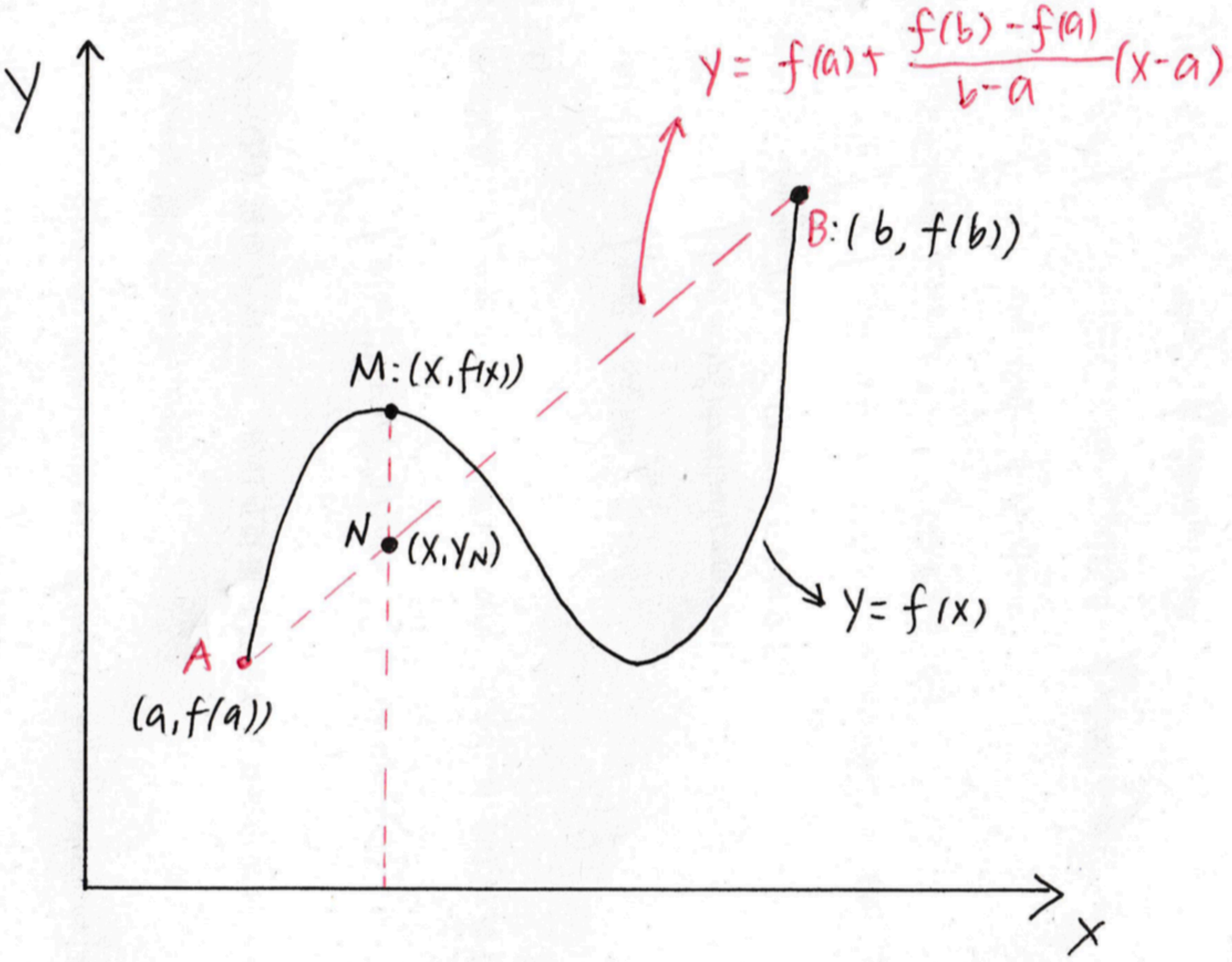
$\varphi(x)$: 有向线段NM

的长度，即

$\varphi(x) := f(x) - y_N$

N: $\overline{AB}$ 与 $y=f(x)$ 的交点

$$\boxed{\varphi(a) = \varphi(b) = 0}$$



【注】拉格朗日中值定理的结论

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad \xi\in(a,b)$$

一般称为**拉格朗日（Lagrange）公式**, 即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b).$$

令 $\theta=(\xi-a)/(b-a)$, 则 $\xi=a+\theta(b-a)$,

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\quad \theta\in(0,1).$$

令 $a=x,\ b=x+\Delta x$, 则

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad \theta\in(0,1).$$

【注】$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 即为

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

它**精确地**表达了**自变量、因变量的增量与函数的导数值**的关系. 称之为**有限增量形式.** 请将上式与

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

加以比较.

【推论】

1. $f'(x) \equiv 0 \ \forall\, x \in I$

$$\Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}: \ f(x) = C \ \forall\, x \in I$$

2. $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in I$

$$\Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}: \ f(x) = g(x) + C \ \forall\, x \in I$$

【例】 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1,1].$

【例 1.5】 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)\,.$

【例】 $|\arctan a - \arctan b\,| \le |\,a - b\,|\,.$

【例】$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2},\ x\in[-1,1].$

【提示】利用

$$(\arcsin x+\arccos x)'=0,\qquad \arcsin 1+\arccos 1=\pi/2.$$

【例 1.5】 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad(x>0)\,.$

【例】 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|.$

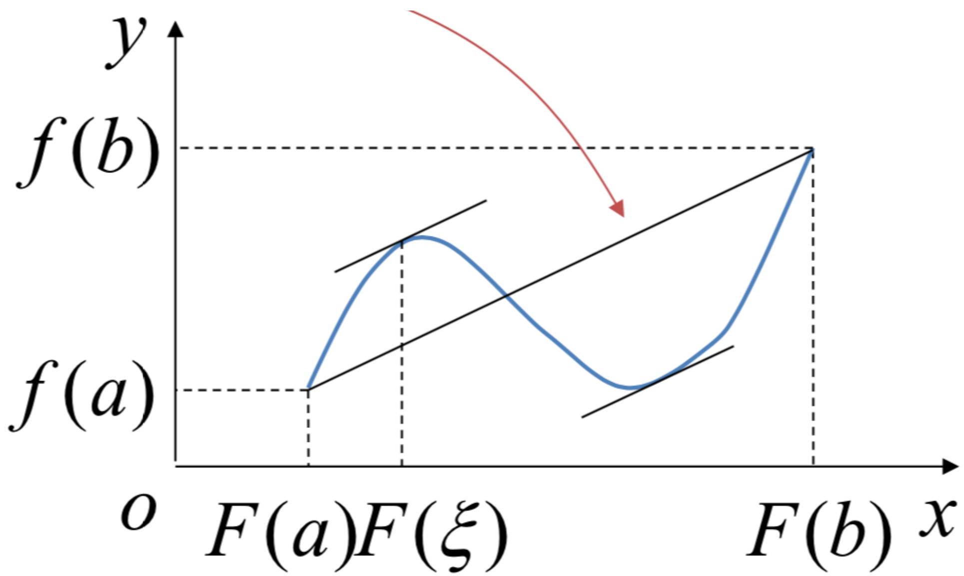
【提示】利用拉格朗日公式.

§ 3.1.4 柯西（Cauchy）中值定理

【柯西（Cauchy）中值定理】

$$\left.\begin{array}{l} f(x), F(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续} \\ f(x), F(x) \text{ 在 } (a,b) \text{ 内可导} \\ \forall\, x \in (a,b):\ F'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{存在 } \xi \in (a,b), \text{使得 } \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$

【注】当 $F(x)=x$ 时, 上式即为拉格朗日公式，所以拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况.



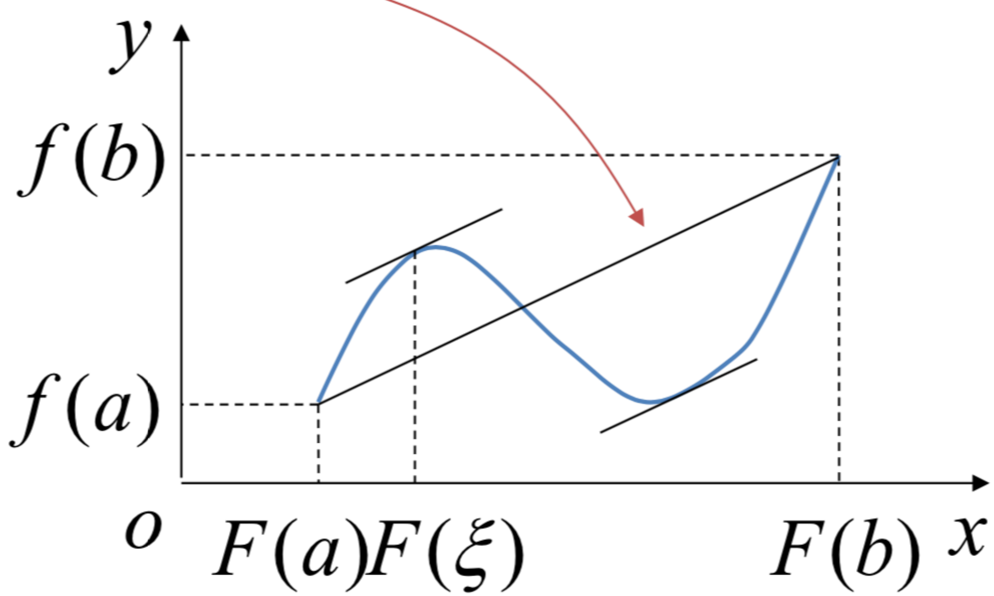
【注】柯西中值定理可以看出是拉格朗日中值定理的参数表达形式.

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}} = \boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线斜率

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(t)}{F'(t)}$$



【例 1.7】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a,b>0$. 则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)\,.$$

【例】$\exists\ \xi\in(1,\mathrm{e}):\ \sin 1=\cos\ln\xi\,.$

【方法】利用逆向思维设辅助函数

【例】$\exists\ \xi \in (1,\mathrm{e})$: $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

【提示】利用柯西中值定理并注意到

$$(\sin \ln x)' = \frac{1}{x} \cos \ln x = (\ln x)' \cos \ln x$$

考察 $f(x) := \sin \ln x,\ F(x) := \ln x$ 在 $[1,\mathrm{e}]$.

【作业】P129-131

A类：4、5 (3) (4)、6 (2) (4)、8、10

11、13

B类：4