§ 2.4.1 高阶导数的定义

一个函数的导数仍然是一个函数，若有必要，可以对导函数继续求导.

【引例】 位移 $s = s(t)$

速度 $v = v(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

加速度 $a = a(t) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$

即，加速度函数 $a(t)$ 是位移函数 $s(t)$ 的导函数的导函数，我们称之为 $s(t)$ 的**二阶导数**.

【**定义**】(1) 设 $y=f(x)$ 可导, 若它的导数 $f'(x)$ 仍是一个可导函数, 则 $f'(x)$ 的导数

$$(f'(x))' \text{ (或 } (y'(x))',\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\text{)}$$

称为函数 $f(x)$ 的**二阶导数**, 记为

$$f''(x) \text{ (或 } y''(x),\ \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\text{)}.$$

(2) 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的**一阶导数.**

(3) 函数 $f(x)$ 本身称为 $f(x)$ 的**零阶导数.**

(4) 若 $f''(x)$ 仍可导, 则它的导数称为 $f(x)$ 的**三阶导数**, 记为

$$f'''(x) \text{ (或 } y'''(x), \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}).$$

(5) 【一般的 n **阶导数**, $n \geq 2$ 时称为**高阶导数**】

设 $y = f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 仍可导, 则它的导数 $(f^{(n-1)}(x))'$ 被称为 $f(x)$ 的 n **阶导数**, 记为

$$f^{(n)}(x) \text{ 或 } y^{(n)}(x), \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},$$

并称 $f(x)$ n **阶可导**.

由此定义, 质点的加速度 $a(t)$ 满足

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

【注】

(1) 若 $y = f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 则 $y = f(x)$ 在点 x 的某个领域内必定具有一切低于 n 阶的导数.

(2) 由定义知, 求高阶导数是一个**逐次求导**的过程.

【例 4.3】$y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 \mathrm{e}^{-\lambda x}$ $(\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ 满足:

$$y'' - \lambda^2 y = 0.$$

【例 4.4】求下列函数的 n 阶导数:

(1) a^x (2) $\sin x$ (3) $\cos x$ (4) $\ln(1 + x)$.

【例 4.5】求 $y = x^\mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$ 的各阶导数.

§ 2.4.2 高阶导数的运算法则

【定理】 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是 n 阶可导, 则

(1) $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 u(x) + c_2 v(x)$ 也是 n 阶可导且

$$\left[c_1 u(x) + c_2 v(x)\right]^{(n)} = c_1 u^{(n)}(x) + c_2 v^{(n)}(x).$$

(2) (**Leibniz 公式**) $u(x)v(x)$ 也 n 阶可导且

$$\big(u(x)v(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x),$$

这里, $C_n^k = \dfrac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$ 是组合系数.

【注】将 **Leibniz 公式**

$$\left(u(x)v(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$$

和二项式展开公式

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

的形式加以比较, 以便于记忆.

(Leibeiz公式）证　用数学归纳法.

当n=1时,

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= C_1^0 u'(x)v(x) + C_1^1 u(x)v'(x)$$

归纳假设 当n=m时. Leibeiz公式成立, 即有

$$(u(x)v(x))^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(m-k)}(x)v^{(k)}(x)$$

则当n=m+1时, 有

$$[u(x)v(x)]^{(m+1)} = \left((u(x)v(x))^{(m)} \right)'$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(m-k)}(x)v^{(k)}(x) \right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left[\left(u^{(m-k)}(x)\right)' v^{(k)}(x) + u^{(m-k)}(x)\left(v^{(k)}(x)\right)' \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(m-k+1)}(x)v^{(k)}(x)}_{I_1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(m-k)}(x)v^{(k+1)}(x)}_{I_2}$$

$$I_1 = u^{(m+1)}(x)v^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} C_m^k u^{(m+1-k)}(x)v^{(k)}(x)$$

$$I_2 = u^{(0)}(x)v^{(m+1)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k u^{(m-k)}(x)v^{(k+1)}(x)$$

$$= u^{(0)}(x)v^{(m+1)}(x) + \sum_{j=1}^{m} C_m^{j-1} u^{(m-(j-1))}(x)v^{(j)}(x)$$

(令 $k=j-1$)

$$\Rightarrow [u(x)v(x)]^{(m+1)} = I_1 + I_2$$

$$= u^{(m+1)}(x)v^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^{m} \underline{\underline{C_m^j}}\, u^{(m+1-j)}(x)v^{(j)}(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \underline{\underline{C_m^{j-1}}}\, u^{(m+1-j)}(x)v^{(j)}(x) + u^{(0)}(x)v^{(m+1)}(x)$$

$$= u^{(m+1)}(x)v^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^{m} \underline{\underline{C_{m+1}^j}}\, u^{(m+1-j)}(x)v^{(j)}(x)$$

$$+ u^{(0)}(x)v^{(m+1)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j u^{(m+1-j)}(x)v^{(j)}(x)$$

即Leibeiz公式对n=m+1成立.

利用了　$C_{m+1}^0 = C_{m+1}^{m+1} = 1$

$$C_m^j + C_m^{j-1} = C_{m+1}^j$$

$\Rightarrow$ Leibeiz公式对任意正整数成立 □

【例 4.6】设 $y = x^2 \sin(2x)$, 求 $y^{(10)}$.

【例 4.7】 求由方程 $x - y + \dfrac{1}{2}\sin y = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【例 4.8】 $\begin{cases} x = 2(1 - \cos\theta), \\ y = 4\sin\theta, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【作业】P106-107

A类：1 (2) (4)、2、5、6 (1) (2)、7

B类：1 (4) (5)、4、6