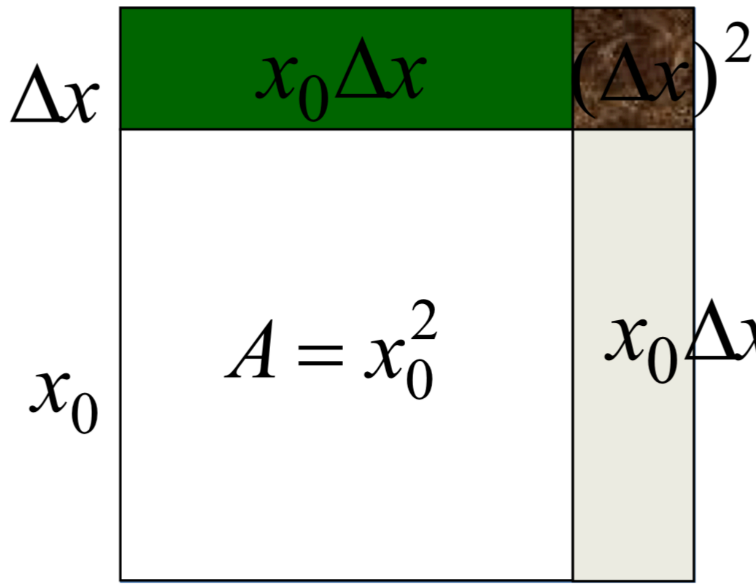
§ 2.5.1 微分的概念

【引例】一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变为 $x_0 + \Delta x$, 问此薄片的面积改变了多少?

解: 边长: x 面积: $S = x^2$



面积的增量为

$$\begin{aligned}\Delta S &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 \\ &= 2x_0\Delta x + \underbrace{(\Delta x)^2}_{=o(\Delta x)}\end{aligned}$$

故当 Δx 很微小时, $\Delta S \approx 2x_2\Delta x$ (称为 S 在 x_0 的**微分**)

【定义 5.1】设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义. 若存在常数 A 使得:

对任意的 $\Delta x\,(x_0+\Delta x\in U(x_0))$, 函数的增量

$$\Delta y := f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **可微**，称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 的**微分**, 记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 或 $\mathrm{d}f\big|_{x=x_0}$.

【注】常数 A 只与 x_0 有关, 与 Δx 无关.

【定理 5.1】函数 f 在点 x_0 **可微**的充要条件是 f 在点 x_0 **可导**, 且

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x\,.$$

【定义 5.2】若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的每一点都可微, 则称 f 为 I **上的可微函数**.

由【定理 5.1】知, 函数 f **在** I **上任一点** x **的微分**记作

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x, \quad x \in I\,. \tag{1}$$

进而

$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad x \in I\,.$$

【注 5.1】若 $y=f(x)$ 在点 x 可微,

则 Δy 是当 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小, 且当 $f'(x) \neq 0$ 时, 有等价关系:

$$\Delta y \sim \mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0)\,.$$

故微分 $\mathrm{d}y$ 是增量 Δy 的主要部分.

又因为 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数, 所以称微分 $\mathrm{d}y$ 是增量 Δy 的**线性主部**.

【例 5.1】求函数 $y=x^3$ 的增量 Δy 与微分 $\mathrm{d}y$.

【注 5.2】对函数 $y = x$, 有

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = (x)'\Delta x = \Delta x\,.$$

即：自变量的增量等于自变量的微分.

进而(1)式改写为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x\,.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \quad \text{if} \quad \mathrm{d}x \neq 0.$$

因此, 导数也常称为**微商**.

【注 5.3】虽然可微与可导等价, 但微分和导数是两个不同的概念.

导数: 函数在某一点 x 的变化率, **只与 x 有关**;

微分: 函数在某一点 x 处由自变量的增量 Δx 所引起的**因变量的增量的主要部分, 与 x, Δx 都有关**.

§ 2.5.2 微分的运算法则

由导数与微分的关系 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 可推出:

1. **基本初等函数的微分公式（见教材第111页）**

2. **四则运算法则**

   设函数 $u(x)$, $v(x)$ 均可微, 则

$$\mathrm{d}(c_1u + c_2v) = c_1\mathrm{d}u + c_2\mathrm{d}v \ (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \ (v \neq 0).$$

3. 复合函数的微分

设函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 均可微, 则

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}[f(\varphi(x))] = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x\,.$$

由于 $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x$, 代入上式有

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u\,.$$

这里 $u = \varphi(x)$ 是中间变量, x 才是真正的自变量!

但它与以 u 为自变量的函数 $y = f(u)$ 的微分式一样!

即：**不论 u 为自变量还是中间变量, 函数 $y = f(u)$ 的微分形式都是相同的**, 这被称为“**一阶微分的形式不变性**”.

有了这个“**形式不变性**”, 我们拿到一个函数 $y=f(u)$ 后, 可以直接按 u 为自变量去求它的微分 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$, 而不用顾虑此时 u 究竟是自变量还是中间变量!

【例 5.2】$y=\ln\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)$. 求 $\mathrm{d}y$.

【例 5.3】$\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$; $\quad$ $\mathrm{d}(\quad)=\cos(\omega t)\mathrm{d}t$.

【例 5.4】$y=\mathrm{e}^{-2x}\cos(2x)$. 求 $\mathrm{d}y$.

§ 2.5.3 微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算
2. 误差估计

1. 函数的近似计算　当函数 $y = f(x)$ 在 x_0 可微时, 有

$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

当 $|\Delta x| \ll 1$ 很小时, 有 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, 进而

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

或当 $x \approx x_0$ 时有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{2}$$

而过 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

几何意义: 当 x 充分靠近 x_0 时, 可用切线近似替代曲线

当 $|x|$ 很小时, 有如下近似公式:

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x, \quad \sin x \approx x, \quad \tan x \approx x,$$

$$\mathrm{e}^x \approx 1+x, \quad \ln(1+x) \approx x$$

【例 5.7】求 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值.

【例 5.9】一个半径为 1 cm 的球, 为了提高表面的光洁度, 需要镀上一层铜. 镀层厚度为 0.01 cm, 估计需用铜多少克? (铜的密度为 8.9 $\mathrm{g/cm^3}$)

2. 误差估计

某个量的精确值为 A (未知), 近似值为 a (测量值), 则

$|A-a|$: a **的绝对误差**

$\dfrac{|A-a|}{|a|}$: a **的相对误差**

若 $|A-a| \le \delta_A$, 则

δ_A: A **的绝对误差限**

$\dfrac{\delta_A}{|a|}$: A **的相对误差限**

误差传递公式:

若 x 是由测量得到，量 y 是由函数 $y = f(x)$ 计算得到，

若测量值 x_0 的误差值为 δ_x, 即 $|\Delta x| = |x - x_0| \le \delta_x$.

当 δ_x 很小时，有

$$|\Delta y| = |f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)\Delta x| \le |f'(x_0)|\delta_x.$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x_0)|\delta_x$

y 的相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y_0|} \approx \dfrac{|f'(x_0)|}{|f(x_0)|}\delta_x$

【作业】P116-117

A类：1、2 (2) (3)、4 (2) (4)、6、8

B类：3、5