§ 3.2.1 泰勒（Taylor）公式

在实际计算中，由于多项式只涉及加、减、乘三种运算,因此用多项式作为复杂函数的近似去运算将有效地节省运算量.

我们知道, 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 那么当 Δx 很小时

$$f(x_0+\Delta x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}_{\approx f(x),\ \text{精确度对 } \Delta x \text{ 为一阶}} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{误差}}$$

为了提高精确度, 必须考虑**用更高次数的多项式作逼近**.

【Taylor 中值定理】设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个开区间 (a,b) 上 $n+1$ **阶可导**. 则对 $x \in (a,b)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2\,!}(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n + R_n(x), \tag{1}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{2}$$

这里 ξ 介于 x_0 与 x 之间.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{=:p_n(x)} + R_n(x)$$

称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的**带拉格朗日余项的泰勒公式**,

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 称为**拉格朗日余项**,

$p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ 称为 n **次泰勒多项式**.

(Taylor 中值定理) 证 (参考《数学分析》陈纪修 上册 Page 194)

考虑

$$G(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)\,(x-t)^k$$

$$H(t) := (x-t)^{n+1}$$

则

$$G(x_0) = f(x) - P_n(x)$$

只需证

$$G(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} H(x_0)$$

不妨设 $x_0 < x$ ($x < x_0$ 时证明类似)

- $G(x), H(x) \in C[x_0, x]$
- $G(x)\ H(x) \in C^1(x_0, x)$ (表示在 (x_0,x) 内可导)

$$G'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[f^{(k)}(t)(x-t)^k\right]'$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[-k f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} + f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k$$

$j = k-1$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} f^{(j+1)}(t)(x-t)^j - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k$$

$$= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

$$H'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

显然 $H'(t)$ 在 (x_0, x) 上不等于 0

由于 $G(x) = H(x) = 0$. 应用 Cauchy 中值定理有

$$\frac{G(x_0)}{H(x_0)} = \frac{G(x_0) - G(x)}{H(x_0) - H(x)}$$

$$= \frac{G'(\xi)}{H'(\xi)} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{(x-\xi)^n}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow G(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} H(x_0) \qquad \square$$

在不需要余项的精确表达式时, 我们有

【定理】设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个开区间 (a,b) 上 $n+1$ **阶可导**. 则对 $x\in(a,b)$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\,. \tag{3}$$

称之为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**带佩亚诺余项的泰勒公式**, 余项 $o((x-x_0)^n)$ 称为 **佩亚诺（Peano）余项**.

证（Peano余项的Taylor公式）

由Taylor中值定理知

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

ξ介于x_0与x之间

则 $$f(x)=p_n(x)-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=p_n(x)+\underbrace{\frac{(x-x_0)^n}{n!}\left(f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)\right)}_{=:\,r_n}$$

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)\right)\to 0\quad(x\to x_0)$$

$$\Rightarrow r_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

这里利用了$f^{(n)}(t)$在(a,b)上连续 □

[定理] 设 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间 (a,b) 上 n 阶可导，且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在

则

$$\forall x\in(a,b):\qquad f(x)=p_n(x)+o((x-x_0)^n)$$

证：令 $r_n(x):=f(x)-p_n(x)$，则

$$r_n(x_0)=\cdots=r_n^{(n)}(x_0)=0$$

下证：$r_n(x)=o((x-x_0)^n)\qquad (x\to x_0)$

数学归纳法，当 $n=1$ 时，即证若 $\boxed{r_1(x_0)=r_1'(x_0)=0，则\ r_1(x)=o(x-x_0)\ (x\to x_0)}$

事实上，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{r_1(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{r_1(x)-r_1(x_0)}{x-x_0}=r_1'(x_0)=0$

归纳假设当 $n=k$ 时定理结论成立，下证

$$\boxed{若\ r(x_0)=r'(x_0)=\cdots=r^{(k+1)}(x_0)=0\quad 则\quad r(x)=o((x-x_0)^{k+1})}$$

事实上，令 $\varphi(x):=r'(x)$ 则 $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(k)}(x_0)=0$

进而，$\varphi(x)=o((x-x_0)^k)$

$\Rightarrow\quad r(x)=r(x)-r(x_0)=\varphi'(\xi)(x-x_0)=o((\xi-x_0)^k)(x-x_0)=o((x-x_0)^{k+1})$ □

§ 3.2.2 麦克劳林（Maclaurin）公式

【**定义**】在泰勒公式 (1) 中若取 $x_0 = 0$, 则 ξ 在 0 与 x 之间. 所以 $\xi = \theta x$ $(0 < \theta < 1)$, 则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$R_n(x) = o(x^n)$ 或 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (\theta \in (0,1)),$

称为**麦克劳林（Maclaurin）公式**.

【几个初等函数的**麦克劳林公式**】

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$

由于 $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x,\ f^{(k)}(0) = 1\ (\forall\ k \in \mathbb{N})$，故有

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = o(x^n)$ 或

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)\,!}x^{n+1}\ (0 < \theta < 1)\,.$$

2. $f(x)=\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)\,!} + R_{2m+1}(x),$$

其中 $R_{2m+1}(x) = o\left(x^{2m+1}\right)$ 或

$$R_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)\,!}\cos\left(\theta x + \frac{2m+2}{2}\pi\right) \quad (0 < \theta < 1)\,.$$

3. $f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)\,!} + R_{2m}(x),$$

其中 $R_{2m}(x) = o\left(x^{2m}\right)$ 或

$$R_{2m}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)\,!}\sin\left(\theta x + \frac{2m+1}{2}\pi\right) \quad (0 < \theta < 1)\,.$$

【注】$\cos x = (\sin x)'$, **而** $\cos x$ **的** n **次泰勒多项式恰为** $\sin x$ **的** $n+1$ **次泰勒多项式的导数.**

4. $f(x) = (1+x)^{\alpha} \quad (x > -1)$

$$(1+x)^{\alpha} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = o(x^n)$ 或

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1),$$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

特别地,

1). 当 $\alpha = m \in \mathbb{N}$ 时, $\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} C_m^k, & 0 \le k \le m, \\ 0, & k > m. \end{cases}$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k,$$

这是熟知的二项式展开定理, 余项为零.

2). 当 $\alpha = -1$ 时, $\binom{-1}{k} = (-1)^k$, 因此

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x),$$

余项为 $R_n(x) = o(x^n)$ 或

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}} \quad (0 < \theta < 1).$$

3). 当 $\alpha = 1/2$ 时, 若 $k > 1$, 则

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$= \frac{(1-2)(1-4)\cdots\left(1-2(k-1)\right)}{2^k k!} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!},$$

$$m!! := \begin{cases} m(m-2)(m-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2, & m = 2j, \\ m(m-2)(m-4)\cdots 5\cdot 3\cdot 1, & m = 2j+1. \end{cases}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k + o(x^n)\,.$$

4). 当 $\alpha = -1/2$ 时, 若 $k \geq 1$, 则

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)(-1-2)(-1-4)\cdots\big(-1-2(k-1)\big)}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + o(x^n).$$

5. $f(x) = \ln(1+x) \quad (x > -1)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = o(x^n)$ 或

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

§ 3.2.3 泰勒公式的应用

一、近似计算

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差: $$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

M: $|f^{(n+1)}(x)|$在包含 0 与 x 的某区间内的上界

例1. 计算无理数 **e** 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

令 $\boldsymbol{x = 1}$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$，欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $\boldsymbol{n = 9}$ 时上式成立，因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281$$

二、利用泰勒公式求极限

【例】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$

三、利用泰勒公式证明不等式

【例】证明 $\sqrt{1+x}>1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\quad(x>0)$

2. 利用泰勒公式求极限

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必塔法则不方便！

解: 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,\right]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ 原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例4. 证明 $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0).$

证: $\because \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$$

【作业】P139

A类：1(2) (6)、2 (2)、4、5、6(3)(4)

B类：2