1.2 无界函数的反常积分

若 $f(x)$ 在 a 的任一邻域内无界 则
称点 a 为 $f(x)$ 的瑕点

[定义] ① 设 $\forall \eta \in (0, b-a)$ $f \in R[a, b-\eta]$

但 f 在 $[b-\eta, b)$ 上无界 ~~(此时称 b 为 $f(x)$ 的瑕点)~~

若 $\lim\limits_{\eta \to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ 存在 (记为 $\int_a^b f(x)\,dx$)

则称之为 $f(x)$ 从 a 到 b 的反常积分

否则称之发散

② 类似地, $\forall \eta' \in (0, b-a)$ $f \in R[a+\eta', b]$ ~~(此时称 a 为 $f(x)$ 的瑕点)~~

但 f 在 $(a, a+\eta']$ 上无界

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\eta' \to 0^+} \int_{a+\eta'}^b f(x)\,dx$$

③ 若 f 在 $[a,b]$ 上有瑕点 $c \in (a,b)$ 但在不包含 c 的

任一闭区间上 f 有界且可积 $\forall \eta_1, \eta_2 > 0$

$$f \in R([a, c-\eta_1] \cup [c+\eta_2, b])$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\eta_1 \to 0^+} \int_a^{c-\eta_1} f(x)\,dx + \lim_{\eta_2 \to 0^+} \int_{c+\eta_2}^b f(x)\,dx$$

[例 2.1] $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

瑕点为 -1 与 1

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 + \int_0^1$$

$$= \lim_{\eta_1 \to 0^+} \int_{-1+\eta_1}^0 + \lim_{\eta_2 \to 0^+} \int_0^{1-\eta_2}$$

$$= \lim_{\eta_1 \to 0^+} [\arcsin x]\Big|_{-1+\eta_1}^0 + \lim_{\eta_2 \to 0^+} [\arcsin x]\Big|_0^{1-\eta_2}$$

$$= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Newton-Leibniz公式

设$F(x)$是$f(x)$的原函数. / $F'(x)=f(x)$.

① 若b是唯一瑕点 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b^-)-F(a)$

特别地 若F在$x=b$连续 则 $F(b^-)=F(b)$

② 若a是唯一瑕点 则 .... $=F(b)-F(a^+)$

③ 若$c\in(a,b)$是唯一瑕点 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(c^+)+F(c^-)-F(a)$$

特别地, F在瑕点处连续 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

[例1 2.3] $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ $\begin{cases} 收敛 & q<1 \\ 发散 & q\geq 1 \end{cases}$

证. $$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \begin{cases} \left[\ln|x-a|\right]_{a+}^{b} \\ \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a+}^{b} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & q\geq 1 \\ \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}. & q<1 \end{cases}$$ □

变换成无穷限的反常积分

令 $t=\frac{1}{x-a}$ $\quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}} t^q d\frac{1}{t}$

$$= +\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} t^{q-2}dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{1}{t^{2-q}}dt$$

$2-q>1$ 收敛

$2-q\leq 1$ 发散

2.2.2 性质 & 判别法.

① 无界函数的反常积分可转化为无穷限的反常积分

例如. $f \in C(a,b]$. a 为 f 的瑕点.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad x = a+\frac{1}{t}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f(a+\tfrac{1}{t})\, d\tfrac{1}{t}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(a+\tfrac{1}{t})\frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\tfrac{1}{t})\frac{1}{t^2}\, dt$$

$\Rightarrow$ 无穷限反常积分的性质均可完全平移到
无界函数的反常积分

② 设 b 是 f, g 的唯一瑕点. 则

②.1 $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $\int_a^b f(x)dx$. $\int_a^b g(x)dx$ 收敛

$$\Rightarrow \int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx \text{ 收敛}$$

$$= \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

②.2 $\forall\ a<d<b$

$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_d^b f(x)dx$ 同敛态 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

②.3 $\int_a^b f(x)dx$. $\int_a^b g(x)dx$ 都收敛 且 $f(x)\le g(x)$ $(x\ge a)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

设 b 是 f 与 g 的唯一瑕点

[定理 2.1] (比较判别法)

设 $f, g: [a,b) \to [0,+\infty)$ 且 $f(x) \leq g(x)$

$\forall A \in (a,b)$ $f, g \in R[a,A]$

① $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

② $\int_a^b f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ 发散.

[推论 1] (比较判别法的极限形式)

设 $f, g: [a,b) \to [0,+\infty)$. 且 $\forall A \in (a,b)$. $f, g \in R[a,A]$

$\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$

① $0 \leq \lambda < +\infty$ 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

② $0 < \lambda \leq +\infty$ 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ 发散

利用 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q}$ $\begin{cases} \text{收敛} & q<1 \\ \text{发散} & q \geq 1 \end{cases}$

[定理] (Cauchy 判别法). 设

$f: [a,b) \to [0,+\infty)$. $\forall A \in (a,b)$. $f \in R[a,A]$

① $0 \leq f(x) \leq \frac{c}{(b-x)^q}$ $(c \in \mathbb{R}_+)$ 且 $0<q<1$ 则

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛

② $f(x) \geq \frac{c}{(b-x)^q}$ 且 $q \geq 1$ $(c>0)$. 则

$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

推论3（Cauchy 判别法的极限形式）

设 $f: [a,b) \to [0,+\infty)$. $\forall A \in (a,b)$. $f \in R[a,A]$

且 $\lim\limits_{x\to b^-} (\cancel{b-x})^p f(x) = \lambda$. 则

① $0<p<1$; $0 \le \lambda < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛

② $p \ge 1$. $0<\lambda \le +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散

[例 2.5 (3)] $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ 发散

证: $x=1$ 是被积函数的唯一瑕点. 且

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 > 0$$

推论3 $\Rightarrow$ $\int$ 发散 □

[例] 求椭圆积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$ 收敛

证: 此处 $x=1$ 是瑕点 由于

$$\lim_{x\to 1^-} (\cancel{1-x})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} > 0$$

$< +\infty$

$\Rightarrow$ 收敛 □

类似 无穷限 的反常积分有

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ 收敛 (b 为瑕点)　　(绝对收敛

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ 收敛

若 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛 但 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 不收敛 / 发散

称之为条件收敛

P285 -287

A: 4 (2) (5). 6 (1)

B: 1 (2) (5) 3

总习题2 2 (1) (4), (4. 5, 9.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\,dx \quad \begin{cases} \text{绝对收敛 当 } p<1 \text{ 时} \\ \text{条件收敛 当 } 1\le p<2 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$\Big\| \quad x=\frac{1}{t}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}}\,dt$$

$$\cancel{\lim_{x\to 0^+} x^2 f(x)}$$

$$\cancel{=\lim_{x\to 0^+} x^{2-p}}$$

or 当 $p<1$ 时. $\left|\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{x^p}$　　Cauchy 收敛判别

当 $1\le p<2$ 时. 类似 $\left|\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\right| \ge \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{x^p}$

$= \frac{1}{2x^p}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)$

$$\int_\varepsilon^1 x^{-p} \sin x^{-1}\, dx$$

$$= -\int_\varepsilon^1 x^{-p+2} \sin x^{-1}\, d(x^{-1})$$

$$= +\int_\varepsilon^1 x^{-p+2}\, d(\cos x^{-1})$$

$$= \left[x^{-p+2} \cos(x^{-1})\right]\Big|_\varepsilon^1 - \underbrace{\int_\varepsilon^1 \cos(x^{-1})\,(2-p)\, x^{-p+1}\, dx}_{\text{[illegible]}}$$

$-1+p < 1$

Cauchy 성질 만족

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} x^{-p+2} \cos(x^{-1}) = 0$ 는 $-p+2 > 0$ 일 때

즉 $p < 2$