系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
33() (2013,), 1156–1163

一类非线性二层规划问题的目标罚函数方法*

郑 跃

(黄冈师范学院数学与计算机科学学院， 黄冈 438000)

万仲平 郝自军

(武汉大学数学与统计学院， 武汉 430072)

摘要 对于下层为线性规划问题的一类非线性二层规划问题，文章利用线性规划的对偶理论，将其转化为一个单层优化问题. 除了添加下层问题的对偶间隙作为惩罚项外，还通过一个目标罚参数来调整上层问题的目标函数值，进而给出了一个求解此类二层规划问题的目标罚函数方法. 最后，数值结果表明，所提出的方法是可行的.

关键词 非线性二层规划，罚函数方法，目标罚函数，全局最优解.

MR(2000) 主题分类号 90C26, 90C30

AN OBJECTIVE PENALTY FUNCTION METHOD FOR A CLASS OF NONLINEAR BILEVEL PROGRAMMING PROBLEM

ZHENG Yue

(*College of Mathematics and Computer Sciences, Huanggang Normal University, Huanggang* 438000)

WAN Zhongping HAO Zijun

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan* 430072)

Abstract In this paper, we consider a class of nonlinear bilevel programming problem in which the lower level is a linear programming problem. Using the dual theory, the original problem is transformed into a single level optimization problem. It not only appends the duality gap of the lower level problem with a penalty, but also gives

* 国家自然科学基金 (71171150, 11226226), 黄冈师范学院博士基金 (2012029603) 资助课题.
收稿日期：2012-10-08, 收到修改稿日期： 2013-02-21.

an objective penalty parameter to adjust the value of the upper level objective function. Then, we construct an objective penalty function method for such a problem. Finally, some numerical results show that the proposed method is feasible.

Key words Nonlinear bilevel programming, penalty function method, objective penalty function, globally optimal solution.

1 引 言

考虑下层问题为线性规划问题的一类非线性二层规划问题的乐观模型[1-3], 其数学模型可以描述如下

$$\begin{aligned} \min_{x,y}\ & f(x,y) \\ \text{s.t.}\ & x \in X, \\ & y \in \Psi(x), \end{aligned} \tag{1}$$

其中给定 $x \in X$, $\Psi(x)$ 是下面问题的最优解集,

$$\begin{aligned} \min_{y\geq 0}\ & d^{\mathrm{T}}y \\ \text{s.t.}\ & Ax + By \leq b, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $x \in R^n$, $y, d \in R^m$, $A \in R^{q\times n}$, $B \in R^{q\times m}$, $b \in R^q$, $f: R^n \times R^m \to R$ 连续，符号 T 表示转置.

在问题 (1) 中，将 $f(x,y)$ 限定为线性函数， Anandalingam 和 White[4] 通过把下层问题的对偶间隙添加到上层目标函数中，提出了一种精确罚函数方法，并且只需求解若干个线性规划问题便可以获得原问题的一个局部最优解. 随后，他们在文 [5] 中又提出了一种可以得到全局最优解的罚函数方法. Campêlo, Dantas 和 Scheimberg[6] 指出文献 [5] 中所考虑的原始对偶紧假设是不确切的，并重新定义了割集，还纠正了检验的方法，进而在不需要紧的假设条件下就可以得到罚问题的良好性质，但全局最优解仍需要一个明确定义的对偶紧假设. 赵茂先和高自友[7] 在假设下层问题具有惟一最优解的条件下，利用罚函数的思想，给出了可以获得其全局最优解的一种全局优化方法. 吕一兵等[8] 针对问题 (1), 利用下层问题的 KKT 最优性条件来代替下层问题，并且取其互补条件作为惩罚项，设计了一种罚函数方法，它保证至少可以得到问题的一个局部最优解. 郑跃等[9] 利用线性规划的对偶理论和罚函数方法的思想，提出了一个求解该类问题的全局优化方法. 然而值得说明的是，该方法的顺利实现存在一个前提条件，即需要计算出下层规划问题 (2) 的对偶问题可行域的全部顶点，但这并不是一件很容易的事情.

在上述研究工作的基础上，受 Meng 等[10,11] 所提出的目标罚函数方法的启发，本文针对问题 (1) 给出了一种新的罚函数方法：除了添加下层问题的对偶间隙作为惩罚项之外，还同时使用了目标罚参数. 其中第 1 个罚参数的作用是保证转化后的罚问题的最优解是原问题的可行解，第 2 个罚参数的目的是使罚问题的最优解同时也是原问题的全局最优解.

在接下来的内容中，本文将介绍新的罚函数以及主要的理论结果，在第 3 节将给出所设计的目标罚函数方法和相关的收敛性分析，最后给出了数值试验结果.

2 目标罚函数

为简单起见，记 $Y(x)=\{y\in R^m|By\le b-Ax,\ y\ge 0\}$, 问题 (1) 的约束域为 $S=\{(x,y)|x\in X,\ y\in Y(x)\}$.

为保证问题 (1) 的最优解的存在性和算法的适应性，假设下列条件满足

(A1) 对于每一个 $x\in X$, $Y(x)\neq\emptyset$, 并且对于所有的 $x\in X$, 都存在一个紧子集 $Z\subset R^m$, 使得 $Y(x)\subset Z$.

(A2) 集合 X 是一个非空的紧集.

定义 2.1 $IR=\{(x,y)|x\in X,\ y\in\Psi(x)\}$ 称为问题 (1) 的诱导域 (或可行域).

定义 2.2 对于任意的 $(x,y)\in IR$, 若存在 $(x^*,y^*)\in IR$, 使得 $f(x^*,y^*)\le f(x,y)$, 则 (x^*,y^*) 称为问题 (1) 的最优解.

利用线性规划的对偶理论，问题 (2) 的对偶问题为

$$\begin{aligned}&\max_{u\ge 0}\ (Ax-b)^{\mathrm T}u\\&\text{s.t.}\ -B^{\mathrm T}u\le d.\end{aligned}\tag{3}$$

记 $U=\{u|-B^{\mathrm T}u\le d,u\ge 0\}$, $\pi(x,y,u)=d^{\mathrm T}y+(b-Ax)^{\mathrm T}u$ 为问题 (2) 和问题 (3) 的对偶间隙. 于是，考虑问题

$$\begin{aligned}\min_{x,y,u}\ & f(x,y)\\ \text{s.t.}\ & \pi(x,y,u)=0,\\ & (x,y)\in S,\\ & u\in U.\end{aligned}\tag{4}$$

显然，关于问题 (1) 和问题 (4) 的最优解和最优值的关系，我们有如下结果.

引理 2.1 若 (x,y) 是问题 (1) 的最优解，则存在 $u\in U$, 使得 (x,y,u) 是问题 (4) 的最优解；反之，若 (x,y,u) 是问题 (4) 的最优解，则 (x,y) 是问题 (1) 的最优解. 进一步，这两个问题具有相同的最优值.

对于 $\rho\in R$ 和 $\gamma>0$, 考虑问题 (4) 的如下罚问题 $P(\rho,\gamma)$

$$\begin{aligned}\min_{x,y,u}\ & Q(f(x,y)-\rho)+\gamma\pi(x,y,u)\\ \text{s.t.}\ & (x,y)\in S,\\ & u\in U,\end{aligned}\tag{5}$$

其中 ρ 称为目标罚参数 [10], γ 是一般的罚参数，函数 $Q:R\to R\bigcup\{+\infty\}$ 是可微的凸函数，

而且还满足

$$\begin{cases} Q(t)=0, & \text{当且仅当}\ \ t\le 0,\\ Q(t)>0, & \text{当且仅当}\ \ t>0,\\ Q(t_2)>Q(t_1), & \text{当且仅当}\ \ t_2>t_1\ge 0. \end{cases}$$

对于问题 (5), 我们不仅添加对偶间隙作为上层问题的惩罚项，而且还将上层问题的目标函数值作为惩罚项. 一方面，在理论上，我们在适当的条件下建立了问题 (4) 和问题 (5) 之间的关系 (具体见引理 2.2 和 2.3). 另一方面，我们在第 3 节所提出的算法中给出了 ρ 的实际计算公式.

类似于郑跃等 [9] 中的定理 2.2, 可以得到问题 (5) 的最优解的存在性结果.

定理 2.1 假设条件 (A1) 和 (A2) 满足，则对于固定的 $\rho\in R$ 和 $\gamma>0$, 问题 (5) 存在最优解 $(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma},u^*_{\rho\gamma})\in S\times E(U)$, 其中 $E(U)$ 表示由集合 U 的所有顶点构成的集合.

为了讨论的方便，定义

$$m_1=\min_{(x,y)\in IR} f(x,y),$$
$$m_2=\max_{(x,y)\in IR} f(x,y),$$
$$F(x,y,u,\rho,\gamma)=Q(f(x,y)-\rho)+\gamma\pi(x,y,u).$$

注 1　虽然上面的 m_1 和 m_2 是未知的，并且 m_1 还是我们要求的结果，但是它们的出现仅仅是起着理论分析的作用.

记问题 (4) 和问题 (5) 的可行域分别为 S_1,S_2. 关于问题 (4) 和问题 (5) 的最优解的关系，有下面的结论.

引理 2.2 假设 (x^*,y^*,u^*) 是问题 (4) 的最优解. 对于 $\rho\in R$ 和 $\gamma>0$, 假设 $(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma},u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (5) 的最优解，同时也是问题 (4) 的可行解. 如果 $f(x^*,y^*)\ge\rho$, 那么 $(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma},u^*_{\rho\gamma})$ 也是问题 (4) 的最优解.

证　由于 $(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma},u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (5) 的最优解. 因此，有

$$F(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma},u^*_{\rho\gamma},\rho,\gamma)\le F(x,y,u,\rho,\gamma),\quad \forall\ (x,y,u)\in S_2.$$

特别地，由于 $(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma},u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (4) 的可行解，于是有

$$Q(f(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma})-\rho)\le Q(f(x,y)-\rho)+\gamma\pi(x,y,u),\quad \forall\ (x,y,u)\in S_2. \tag{6}$$

又因为 (x^*,y^*,u^*) 是问题 (4) 的最优解，所以

$$f(x^*,y^*)\le f(x,y),\quad \forall\ (x,y,u)\in S_1.$$

因此，我们有

$$f(x^*,y^*)\le f(x^*_{\rho\gamma},y^*_{\rho\gamma}). \tag{7}$$

利用式 (6) 可得

$$Q(f(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}) - \rho) \leq Q(f(x^*, y^*) - \rho). \tag{8}$$

结合式 (7), (8) 和 $f(x^*, y^*) \geq \rho$, 可得

$$f(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}) = f(x^*, y^*).$$

因此， $(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (4) 的最优解.

引理 2.3 假设条件 (A1) 和 (A2) 成立. 对于 $\rho \in R$ 和 $\gamma > 0$, 如果 $(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (5) 的最优解，那么下面的结果成立.

(I) 如果 $F(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma}, \rho, \gamma) = 0$, 那么 $m_1 \leq \rho \leq m_2$ 成立.

(II) 如果 $F(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma}, \rho, \gamma) > 0$ 和 $\rho \leq m_2$, 那么 $\rho < m_1$ 成立. 进一步, 若 $(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (4) 的可行解，则它也是问题 (4) 的最优解.

证 (I) 由于 $F(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma}, \rho, \gamma)=0$, 因此， $\rho \leq m_2$ 成立. 结合 $Q(f(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}) - \rho)=0$ 和函数 $Q(\cdot)$ 的定义，可知 $f(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}) - \rho \leq 0$. 另外， $\pi(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma}) = 0$. 从而， $(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (4) 的可行解. 因此，我们可得： $m_1 \leq \rho \leq m_2$.

(II) 利用反证法证明. 假设 $m_1 \leq \rho$. 于是有 $m_1 \leq \rho \leq m_2$. 在假设条件 (A1) 和 (A2) 下, f 是定义在紧集 IR 上的连续函数，因此存在 $(\bar{x}, \bar{y}) \in IR$, 使得 $f(\bar{x}, \bar{y}) = \rho$, 并且存在 $\bar{u} \in U$, 使得 $\pi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) = 0$. 从而， $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \in S_1$, 并且 $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \rho, \gamma) = 0$ 成立.

又由于 $(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (5) 的最优解，所以,

$$F(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma}, \rho, \gamma) \leq F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \rho, \gamma) = 0,$$

又因为 $F(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma}, \rho, \gamma) > 0$, 所以矛盾！因此，假设不成立. 故 $\rho < m_1$ 成立.

此外，由引理 2.2 知，若 $(x^*_{\rho\gamma}, y^*_{\rho\gamma}, u^*_{\rho\gamma})$ 是问题 (4) 的可行解，则它也是问题 (4) 的最优解.

3 算法及理论结果

下面将给出问题 (4) 的具体求解算法以及相应的收敛性分析.

算法 1

步骤 1 选取初始值 $\varepsilon > 0, \gamma_1 = \gamma_1^1 > 0, \kappa > 1, \tau > 0, a_1 < f(x^0, y^0) = b_1, (x^0, y^0, u^0) \in S_1$, $k = 1$ 和 $j = 1$.

步骤 2 计算 $\rho^k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

步骤 3 求解问题 $P(\rho^k, \gamma_k^j)$, 得到最优解 (x_j^k, y_j^k, u_j^k).

步骤 4 如果 (x_j^k, y_j^k, u_j^k) 不是问题 (4) 的可行解，令 $\gamma_k^{j+1} = \kappa\gamma_k^j$, $j = j + 1$, 并转步骤 3. 否则，转步骤 5.

步骤 5 令 $\gamma_k = \gamma_k^j$. 如果 $F(x_j^k, y_j^k, u_j^k, \rho^k, \gamma_k) = 0$, 令 $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \rho^k$, $\rho^{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$, $j = 1$, $\gamma_{k+1}^j = \gamma_k$, $k = k + 1$, 转步骤 6. 否则， (x_j^k, y_j^k, u_j^k) 是问题 (4) 的最优解，停止.

步骤 6 如果 $|b_k - a_k| < \varepsilon$, 那么 $a_k = a_k - \tau$, 转步骤 2. 否则，转步骤 3.

注 2　从上述算法的实施过程可以看出，序列 $\{\rho^k\}$ 是单调非增的．此外，若存在某个 $\widetilde{k}$，使得 $\rho^{\widetilde{k}} < m_1$，那么对于所有的 $k \geq \widetilde{k}$，必然有 $\rho^k = \rho^{\widetilde{k}}$．所以，虽然 m_1 是未知的，但可以根据引理 2.3 的结果来比较 m_1 和 ρ^k 的大小．

下面的定理意味着算法 1 中的步骤 4 在有限迭代步内终止．

定理 3.1　假设条件 (A1) 和 (A2) 成立．对于固定的 k，如果 (x_j^k, y_j^k, u_j^k) 是问题 $P(\rho^k, \gamma_k^j)$ 的最优解，那么存在 $\gamma_k^* > 0$，使得对于所有的 $\gamma_k^j > \gamma_k^*$，(x_j^k, y_j^k, u_j^k) 是问题 (4) 的可行解．

证　如果对于任意的 $(x,y,u) \in S \times E(U)$，都有 $\pi(x,y,u) = 0$．此时，算法 1 中的步骤 4 显然在有限迭代步内终止．因此，不妨假设下面的集合

$$D = \{(x,y,u) | (x,y,u) \in S \times E(U),\ \pi(x,y,u) > 0\}$$

是非空的．

令

$$g_1 = \min_{(x,y,u)\in D} \pi(x,y,u), \quad g_2 = \min_{(x,y)\in S} Q(f(x,y) - \rho^k), \quad \gamma_k^* = \frac{F(x_j^k, y_j^k, u_j^k, \rho^k, \gamma_k^j) - g_2}{g_1},$$

则 $\gamma_k^* \geq 0$．当 $\gamma_k^j > \gamma_k^*$ 时，可得

$$\begin{aligned}
\min_{(x,y,u)\in D} F(x,y,u,\rho^k,\gamma_k^j) &= \min_{(x,y,u)\in D} [Q(f(x,y) - \rho^k) + \gamma_k^j \pi(x,y,u)] \\
&> \min_{(x,y,u)\in D} [Q(f(x,y) - \rho^k) + \gamma_k^* \pi(x,y,u)] \\
&\geq \min_{(x,y)\in S} Q(f(x,y) - \rho^k) + \gamma_k^* \min_{(x,y,u)\in D} \pi(x,y,u) \\
&= F(x_j^k, y_j^k, u_j^k, \rho^k, \gamma_k^j),
\end{aligned}$$

这说明问题 $P(\rho^k, \gamma_k^j)$ 的最优解 (x_j^k, y_j^k, u_j^k) 一定满足 $\pi(x_j^k, y_j^k, u_j^k) = 0$，即 (x_j^k, y_j^k, u_j^k) 是问题 (4) 的一个可行解．因此，步骤 4 在有限迭代步内终止．

结合定理 3.1 与引理 2.2 的结论，容易得到

定理 3.2　假设条件 (A1) 和 (A2) 成立．在算法 1 中假设对于所有的 $k \geq 1$，都有 $\rho^k < m_1$ 成立．如果 (x^k, y^k, u^k) 是问题 $P(\rho^k, \gamma_k)$ 的最优解，那么它也是问题 (4) 的最优解．

注 3　为了更好的分析定理 3.2，在理论上引入 $\rho^k < m_1$ 是必要的．然而，在所提出算法的具体实施过程中，该条件可以被移除．

定理 3.3　假设条件 (A1) 和 (A2) 成立．如果 $\{(x^k, y^k, u^k)\}$ 是在算法 1 中求解问题 $P(\rho^k, \gamma_k)$ 所产生的序列，那么有下面的结论．

(I) 如果算法在第 $\bar{k}$ 次迭代步终止，那么 $(x^{\bar{k}}, y^{\bar{k}})$ 是问题 (1) 的最优解．

(II) 如果 $\{(x^k, y^k)\}$ 是无穷序列，那么它的任一极限点是问题 (1) 的最优解．

证　类似于 Meng 等 [11] 中的定理 2.3 的证明过程．

4　数值试验

为了说明算法 1 的可行性，考虑 Floudas 等 [12] 中的算例 ex9.1.1–ex9.1.9，并依次记为算例 1–9．此外，为了更好的比较算法 1 的计算结果，我们在数值试验中还考虑了 Meng 等 [11]

提出的目标罚函数方法. 为简单起见, 在本文中记其为算法 2. 这两种算法的数值结果比较见表 1.

表 1 算法 1 与算法 2 的计算结果

算例	算法 1		算法 2		Floudas 等[12]
	最优解	最优值	最优解	最优值	最优值
1	(5, 4, 2)	−13	(4.9594, 4.1030, 2.0614)	−13.1454	−13
2	(4, 4)	−16	(4.1071, 3.9465)	−15.9465	−16
3	(0, 0.9, 0, 0.6, 0.4)	−29.2	(−0.2755, 0.7367, 0.0639, 0.7387, −0.2749)	−28.9341	−29.2
4	(19, 14)	−37	(19.6619, 13.7352)	−35.2790	−37
5	(0, 0, 1)	−1	(0, 0, 1.0573)	−1.0574	−1
6	(16, 11)	−49	(15.5764, 3.4559)	−25.9441	−49
		β=1000	(16.0754, 10.9623)	−48.9623	
7	(0, 0.9, 0, 0.6, 0.4)	−26	(−0.1142, 0.6767, 0.0480, 0.5753, −0.2517)	−25.6194	−26
8	(2, 0, 1.5, 0)	−3.25	(2.5468, 0.0005, 3.2971, −0.0092)	−3.4456	−3.25
9	(0.8889, 2.2222)	3.1111	(0.8179, 2.3642)	3.1821	3.1111

在数值试验中, 选取初始值 $\varepsilon = 0.0001$, $\gamma_1 = 10$, $\kappa = 1$, $\tau = 1$, $Q(t) = \max\{t, 0\}^2$. 在算法 2 中, 选取与算法 1 中相同的 $Q(t)$, 同时选取 $P(t) = \beta \max\{t, 0\}^2$, 其中如果没有做特别说明, 取 $\beta = 10$. 此外, 这两种算法对于同一个算例都选取相同的目标罚参数值.

从表 1 可以看出, 算法 1 的计算结果与参考文献 [12] 中的数值结果是相同的. 算法 2 的优越之处是可以应用于求解下层规划为凸规划的一类非线性二层规划问题, 但对于本文所选取的算例却仅仅只能计算出各个算例的近似最优解. 这也说明了本文所提出的罚函数方法是可行的.

参考文献

[1] Bard J F. Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[2] Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. Nonconvex Optimization and Its Applications Series. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[3] Dempe S. Annottated bibliography on bilevel programming and mathematical problems with equilibrium constraints. *Optimization*, 2003, **52**: 333–359.

[4] Anandalingam G, White D J. A solution for the linear static Stackelberg problem using penalty function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**: 1170–1173.

[5] White D J, Anandalingam G. A penalty function approach for solving bi-level linear programs. *Journal of Global Optimization*, 1993, **3**: 397–419.

[6] Campêlo M, Dantas S, Scheimberg S. A note on a penalty function approach for solving bilevel linear programs. *Journal of Global Optimization*, 2000, **16**: 245–255.

[7] 赵茂先，高自友．用罚函数求解线性双层规划的全局优化方法．运筹与管理，2005, **14**(4): 25–28.

[8] 吕一兵，陈忠，万仲平，王广民．非线性 - 线性二层规划问题的罚函数方法．系统科学与数学，2009, **29**(5): 630–636.

[9] 郑跃，万仲平，吕一兵．非线性二层规划问题的全局优化方法．系统科学与数学，2012, **32**(5): 513–521.

[10] Meng Z Q, Hu Q Y, Dang C Y, Yang X Q. An objective penalty function method for nonlinear programming. *Applied Mathematics Letters*, 2004, **17**: 683–689.

[11] Meng Z Q, Dang C Y, Shen R, Jiang M. An objective penalty function of bilevel programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2012, **153**(2): 377–387.

[12] Floudas C A, Pardalos P M, Adjiman C S, Esposito W R, Gümüs Z H, Harding S T, Klepeis J L, Meyer C A, Schweiger C A. Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization. Nonconvex Optimization and Its Applications, Vol. 33, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.