2014,**34A**(1):70–79

数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

http://actams.wipm.ac.cn

可数族弱 Bregman 相对非扩展映像的收敛性分析 *

[1] 陈加伟 [2] 万仲平 [3] 赵烈济

([1] 西南大学数学与统计学院 重庆 400715; [2] 武汉大学数学与统计学院 武汉 430072;
[3] 庆尚国立大学教育学院数学教育系 韩国晋州 660-701)

摘要：在自反 Banach 空间中，引入可数族弱 Bregman 相对非扩张映像概念，构造了两种迭代算法求解可数族弱 Bregman 相对非扩张映像的公共不动点．在适当条件下，证明了两种迭代算法产生的序列的强收敛性.

关键词：强收敛性定理； Bregman 距离； Bregman 投影； (弱)Bregman 相对非扩张映像.

MR(2000) 主题分类：47H09; 47H10; 47J25 **中图分类号**：O177 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2014)01-70-10

1 引言

本文总假设 R 为实数集， E 为实自反 Banach 空间其对偶空间为 E^*, C 为 E 的非空闭凸子集， E^* 与 E 的范数以及对偶对分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为真凸下半连续函数．函数 f 的 Fenchel 共轭函数 $f^*:E^*\to(-\infty,+\infty]$ 定义为

$$f^*(\xi)=\sup\{\langle\xi,x\rangle-f(x):x\in E\}.$$

记函数 f 的有效域为 $\mathrm{dom}f=\{x\in E:f(x)<+\infty\}$. $T:C\to C$ 为一非线性算子其不动点集记为 $F(T)=\{x\in C:Tx=x\}$. 称 T 为非扩张的，如果

$$\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|,\quad\forall x,y\in C.$$

1967 年，Bregman[1] 引入了 Bregman 距离函数 D_f (见定义 2.1), 并被广泛应用于设计和分析求解可行性问题、优化问题、均衡问题以及不动点理论等 [2−23]. Nakajo 和 Takahashi[24] 在 Hilbert 空间中构造了一种 Mann 型迭代算法求解非扩张算子 $T:C\to C$ 的不动点，并证明了该算法的强收敛性． Martinez-Yanes 与 Xu[25] 构造了一种 Halpern 型迭代算法求解非扩张算子 $T:C\to C$ 的不动点，同样得到该算法的强收敛性． Qin 和 Su[26] 将文献 [25] 的结论推广到了一致凸一致光滑 Banach 空间中的相对非扩张映像． 2005 年， Butnariu 和 Resmerita[10] 提出了一种 Bregman 型迭代算法求解算子方程问题, 并证明了算法的收敛性. 最近， Reich 与 Sabach[15] 运用 Bregman 投影方法研究了极大单调算子的公共零元问题, 在一些适当条件下，他们得到了关于求极大单调算子零元的算法的强收敛性．随后， Reich

收稿日期: 2012-04-19; 修订日期: 2013-08-17

E-mail: J.W.Chen713@163.com; zpwan-whu@126.com; yjcho@gnu.ac.kr

* 基金项目：国家自然科学基金 (71171150) 和中央高校基本科研业务专项基金 (201120102020004) 资助

和 Sabach[16,18] 将文献 [15] 的算法以及收敛性应用于求解有限 Bregman 强非扩张算子以及有限 Bregman 稳固非扩张算子的公共不动点问题． Chen 等人 [21] 在自反 Banach 空间中引入了一类弱 Bregman 相对非扩张映像，其包括非扩张映像、相对非扩张映像、 Bregman 相对非扩张映像等，并给出例子说明该类算子的存在性，然后，构造了一些迭代算法求解弱 Bregman 相对非扩张映像的不动点问题以及算法的强收敛性.

受上述工作的启发，本文将在自反 Banach 空间中引入一类可数族弱 Bregman 相对非扩张映像．利用 Mann 型和 Halpern 型迭代方法，构造两种迭代算法求解可数族弱 Bregman 相对非扩张映像的公共不动点．在适当条件下，证明两种迭代算法产生的序列的强收敛性.

2 预备知识

$\upsilon\in C$ 称为 T 的渐进不动点，若 C 包含一序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 υ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n-x_n\|=0$. $\upsilon\in C$ 称为 T 的强不动点，若 C 包含一序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 υ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n-x_n\|=0$. 记 T 的渐进不动点集与强不动点集分别为 $\hat F(T)$ 和 $\tilde F(T)$. 设 $\{x_n\}\subseteq E$, 记 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x\in E$ 为 $x_n\to x$. 对任意 $x\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$ 与 $y\in E$,f 在 x 沿方向 y 的右方向导数定义为

$$f^0(x,y):=\lim_{t\searrow 0}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}.$$

Bauschke, Borwein 和 Combettes[5] 给出来了 Legendre 函数 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 的概念，即， f 为 Legendre, 若 f 在 $\mathrm{dom}\ \partial f$ 的每一凸子集上， ∂f 为局部有界单值的且 $(\partial f)^{-1}$ 在其有效域上也是局部有界的．如果 E 为自反 Banach 空间，则 f 是 Legendre 当且仅当它满足 (C1) 和 (C2).

(C1) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)\neq\emptyset$, f 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$ 上是 Gâteaux 可微的且 $\mathrm{dom}\ f=\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$;

(C2) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f^*)\neq\emptyset$, f^* 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f^*)$ 上是 Gâteaux 可微的且 $\mathrm{dom}\ f^*=\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f^*)$.

值得注意的是如果 E 为自反的， $(\partial f)^{-1}=\partial f^*$. 由 (C1) 和 (C2), 可得

$$\nabla f=(\nabla f^*)^{-1},\ \mathrm{ran}\nabla f=\mathrm{dom}\nabla f^*=\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f^*),$$
$$\mathrm{ran}\nabla f^*=\mathrm{dom}\nabla f=\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f).$$

本文总假设凸函数 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是 Legendre.

定义 2.1[1,9] 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数． Bregman 距离函数 $D_f:\mathrm{dom}f\times\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ f)\to[0,+\infty)$ 定义为 $D_f(y,x):=f(y)-f(x)-\langle\nabla f(x),y-x\rangle$.

注 2.1[18] Bregman 具有如下性质.

(1) 三点等式，对任意 $x\in\mathrm{dom}f$ 与 $y,z\in\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ f)$, 有

$$D_f(x,y)+D_f(y,z)-D_f(x,z)=\langle\nabla f(z)-\nabla f(y),x-y\rangle;$$

(2) 四点等式，对任意 $y,\omega\in\mathrm{dom}f$ 与 $x,z\in\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ f)$, 有

$$D_f(y,x)-D_f(y,z)-D_f(\omega,x)+D_f(\omega,z)=\langle\nabla f(z)-\nabla f(x),y-\omega\rangle.$$

定义 2.2[1] 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数． $x\in\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ f)$ 到非空闭凸集 $C\subset\mathrm{dom}f$ 的 Bregman 投影为唯一的向量 $\mathrm{proj}_C^f(x)\in C$ 满足

$$D_f(\mathrm{proj}_C^f(x),x)=\inf\{D_f(y,x):y\in C\}.$$

定义 2.3[20] 设 C 为 $\mathrm{dom}f$ 的非空闭凸子集，$T:C\to \mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ f)$ 的算子且 $F(T)\neq\emptyset$. T 称为

(1) 拟 Bregman 非扩张的，若

$$D_f(u,Tx)\leq D_f(u,x),\quad \forall x\in C,u\in F(T);$$

(2) Bregman 相对非扩张的，若 $\hat{F}(T)=F(T)$ 且

$$D_f(u,Tx)\leq D_f(u,x),\quad \forall x\in C,u\in F(T);$$

(3) 弱 Bregman 相对非扩张的，若 $\tilde{F}(T)=F(T)$ 且

$$D_f(u,Tx)\leq D_f(u,x),\quad \forall x\in C,u\in F(T).$$

定义 2.4 设 C 为 $\mathrm{dom}f$ 的非空闭凸子集，$\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 C 到 C 的自映像且 $F(\{T_n\}_{n=0}^{\infty})\neq\emptyset$. $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 称为可数族弱 Bregman 相对非扩张，若 $\tilde{F}(\{T_n\}_{n=0}^{\infty})=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F(T_n)$ 且

$$D_f(u,T_nx)\leq D_f(u,x),\quad \forall x\in C,u\in F(T_n),n\geq 0.$$

注 2.2 如果 $\tilde{F}(\{T_n\}_{n=0}^{\infty})=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F(T_n)$, 则 $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 也称为一致闭的.

定义 2.5[8] 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数. f 称为

(1) 总体凸的在 $x\in\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}f)$ 处, 若它在 x 处的总体凸性模, 即, 函数 $\nu_f:\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}f)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 定义为

$$\nu_f(x,t):=\inf\{D_f(y,x):y\in\mathrm{dom}f,\|y-x\|=t\}>0,\quad t>0;$$

(2) 在有界集上总体凸的，若 $\nu_f(B,t)$ 为正数对 E 的任何非空有界子集 B 和 $t>0$, 其中 $\nu_f:\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}f)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 定义为 $\nu_f(B,t):=\inf\{\nu_f(x,t):x\in B\cap\mathrm{dom}f\}$.

定义 2.6[8,15] 函数 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 称为序列一致的，若对 E 中的任意两个序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使得第一个有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}D_f(y_n,x_n)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$.

引理 2.1[8,9] 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为凸函数且有效域中的点不唯一. 则 f 为序列一致的当且仅当它在有界集上为总体凸的.

引理 2.2[14] 设 $f:E\to R$ 为一致 Fréchet 可微的且在 E 的有界子集上有界. 则 ∇f 在 E 的有界集上一致连续.

引理 2.3[15] 设 $f:E\to R$ 为 Gâteaux 可微且总体凸的函数. 如果 $x_0\in E$ 且序列 $\{D_f(x_n,x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，那么序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也有界.

引理 2.4[15] 设 $f:E\to R$ 为 Gâteaux 可微且总体凸的函数，$x_0\in E$. 假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意弱子序列极限属于 C. 若 $D_f(x_n,x_0)\leq D_f(\mathrm{proj}_C^f(x_0),x_0)$ 对任意 $n\in N$, 那么 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}_C^f(x_0)$.

引理 2.5[21] 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Legendre, C 为 $\mathrm{int}\ (\mathrm{dom}\ f)$ 的非空闭凸子集且 $T:C\to C$ 关于 f 为拟 Bregman 非扩张映像. 则 $F(T)$ 为闭凸集.

引理 2.6 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gâteaux 可微且真凸下半连续的. 那么，对任意 $z\in E$, 有

$$D_f\Big(z,\nabla f^*\Big(\sum_{i=1}^{N}t_i\nabla f(x_i)\Big)\Big)\leq\sum_{i=1}^{N}t_iD_f(z,x_i),$$

其中， $\{x_i\}_{i=1}^N \subset E, \{t_i\}_{i=1}^N \subset (0,1)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^N t_i = 1$.

引理 2.7[10] 设 $f: E \to R$ 为 Gâteaux 可微且在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ 上为总体凸的函数, $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f), C \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ 为非空闭凸集. 则有如下结论相互等价

(1) $\hat{x} \in C$ 且 $\hat{x} = \mathrm{proj}_C^f(x)$;

(2) $\hat{x} \in C$ 为如下变分不等式的解

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(z), z - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C;$$

(3) $\hat{x} \in C$ 为如下不等式的解

$$D_f(y,z) + D_f(z,x) \leq D_f(y,x), \quad \forall y \in C.$$

3 主要结论

本节，我们将引入两种迭代算法求解一可数族弱 Bregman 相对非扩张映像的公共不动点. 在一些适当的条件下，证明这些算法的强收敛性.

定理 3.1 设 C 为实自反 Banach 空间 E 的非空闭凸子集， $f: E \to R$ 为 Legendre 且在 E 的有界集上为有界的，一致 Fréchet 可微，总体凸的， $\{T_n\}$ 为 C 到 C 的一可数族弱 Bregman 相对非扩张映像使得 $F = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由如下算法生成

$$\begin{cases} x_0 \in C, \ Q_0 = C, \\ z_n = \nabla f^*(\beta_n \nabla f(T_n(x_n)) + (1-\beta_n)\nabla f(x_n)), \\ y_n = \nabla f^*(\alpha_n \nabla f(x_n) + (1-\alpha_n)\nabla f(z_n)), \\ C_n = \{z \in C_{n-1} \cap Q_{n-1} : D_f(z, y_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ C_0 = \{z \in C : D_f(z, y_0) \leq D_f(z, x_0)\}, \\ Q_n = \{z \in C_{n-1} \cap Q_{n-1} : \langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), z - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = \mathrm{proj}_{C_n \cap Q_n}^f x_0, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

其中， $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ 使得 $\liminf\limits_{n\to\infty}(1-\alpha_n)\beta_n > 0$. 则有序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 强收敛于点 $\mathrm{proj}_F^f(x_0)$, 其中， $\mathrm{proj}_F^f(x_0)$ 为 x_0 到 F 上的 Bregman 投影.

证 由引理 2.5, 可得 F 为 E 的非空闭凸子集. 易知， C_0, C_1, Q_0 以及 Q_1 为闭凸的. 假设 C_k 和 $Q_k (k \geq 1)$ 为闭凸的. 则有 $C_k \cap Q_k$ 为闭凸集. 对每一 $z \in C_{k+1}, y \in Q_{k+1}$, 我们有

$$\begin{aligned} & D_f(z, y_{k+1}) \leq D_f(z, x_{k+1}) \\ \Longleftrightarrow & \langle \nabla f(x_{k+1}), z - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(y_{k+1}), z - y_{k+1} \rangle \leq f(y_{k+1}) - f(x_{k+1}) \\ \Longleftrightarrow & \langle \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(y_{k+1}), z - y_{k+1} \rangle \leq f(y_{k+1}) - f(x_{k+1}) - \langle \nabla f(x_{k+1}), y_{k+1} - x_{k+1} \rangle \\ \Longleftrightarrow & \langle \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(y_{k+1}), z - y_{k+1} \rangle \leq D_f(y_{k+1}, x_{k+1}), \end{aligned}$$

从而 $\langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_k), y - x_k \rangle \leq 0$, 即， C_{k+1} 与 Q_{k+1} 为闭凸的. 故，对任意 $n \geq 0, C_n$ 和 Q_n 均为闭凸集. 任取 $p \in F$, 有

$$D_f(p, y_n) = D_f(p, \nabla f^*(\alpha_n \nabla f(x_n) + (1-\alpha_n)\nabla f(z_n)))$$

$$
\begin{aligned}
&\le \alpha_n D_f(p,x_n)+(1-\alpha_n)D_f(p,\nabla f^*(\beta_n\nabla f(T_n(x_n))+(1-\beta_n)\nabla f(x_n)))\\
&\le \alpha_n D_f(p,x_n)+(1-\alpha_n)[(1-\beta_n)D_f(p,x_n)+\beta_n D_f(p,T_nx_n)]\\
&\le \alpha_n D_f(p,x_n)+(1-\alpha_n)[(1-\beta_n)D_f(p,x_n)+\beta_n D_f(p,x_n)]\\
&= D_f(p,x_n),
\end{aligned}
$$

则有 $p\in C_n$, 进而对任意 $n\ge 0, F\subset C_n$.

用归纳法证明， $F\subset Q_n$， $\forall n\ge 0$. 易知， $F\subset Q_0=C$. 假设 $F\subset Q_k$ 对于 $k\ge 0$. 由 $x_{k+1}=\mathrm{proj}^f_{C_k\cap Q_k}(x_0)$, 我们有

$$\langle \nabla f(x_0)-\nabla f(x_{k+1}), x_{k+1}-p\rangle\ge 0,\quad \forall p\in F\subset C_k\cap Q_k,$$

即， $p\in Q_{k+1}$. 因此， $F\subset C_n\cap Q_n$. 于是对任意 $n\ge 0, C_n\cap Q_n$ 为非空闭凸集. 故 $\{x_n\}$ 是有意义的.

下面我们证明 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 序列.

由于对任意 $z\in Q_n, \langle\nabla f(x_0)-\nabla f(x_n), z-x_n\rangle\le 0$. 从而 $x_n=\mathrm{proj}^f_{Q_n}(x_0)$. 故，对任意的 $p\in F$ 有

$$D_f(x_n,x_0)\le D_f(p,x_0).$$

再由 $x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{C_n\cap Q_n}(x_0)\in Q_n$, 可得

$$D_f(x_n,x_0)\le D_f(x_{n+1},x_0).$$

所以 $\{D_f(x_n,x_0)\}$ 有界递增数列, 进而 $\{x_n\},\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 都为有界的. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}D_f(x_n,x_0)$ 存在. 对任意 $m>n$, 由 $x_m\in Q_{m-1}\subset Q_n$ 和引理 2.7, 有

$$D_f(x_m,x_n)\le D_f(x_m,x_0)-D_f(x_n,x_0).$$

在上式中，令 $m,n\to\infty$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}D_f(x_m,x_n)=0$. 由 f 在 E 的有界子集上的总体凸性以及引理 2.1, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$. 所以 $\{x_n\}$ 为一 Cauchy 序列. 不妨令 $x_n\to\bar\omega\in C$.

现在我们证明 $\bar\omega\in F$. 因 f 在 E 的有界子集上为一致 Fréchet 可微的，由引理 2.1, 可知 ∇f 在 E 的有界子集上为范数到范数的一致连续. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|=0.$$

由于 $x_{n+1}\in C_n$, 则有

$$D_f(x_{n+1},y_n)\le D_f(x_{n+1},x_n),$$

进一步，有 $\lim\limits_{n\to\infty}D_f(x_{n+1},y_n)=0$. 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-y_n\|=0$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(y_n)\|=0.$$

由三角不等式 $\|x_n-y_n\|\le\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-y_n\|$, $\|x_n-y_n\|\to 0$ 且 $y_n\to\bar\omega$ 当 $n\to\infty$. 由于

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(y_n)\|\\
&=\|\nabla f(x_{n+1})-(\alpha_n\nabla f(x_n)+(1-\alpha_n)\nabla f(z_n))\|\\
&\ge -\alpha_n\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|+(1-\alpha_n)\beta_n\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(T_nx_n)\|\\
&\quad -(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|.
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}&(1-\alpha_n)\beta_n\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(T_nx_n)\|\\ \le\ &\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(y_n)\|+\alpha_n\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|\\ &+(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|.\end{aligned}$$

因为 $\liminf\limits_{n\to\infty}(1-\alpha_n)\beta_n>0$, 在上式中，令 $n\to\infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(T_nx_n)\|=0,$$

从而， $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-T_nx_n\|=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-T_nx_n\|=0$. 因此， $\bar{\omega}\in\tilde{F}(\{T_n\}_{n=0}^{\infty})$. 由注 2.2, $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一致闭的以及 $\bar{\omega}\in F=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F(T_n)$.

最后，我们证明 $\bar{\omega}=\mathrm{proj}_F^f(x_0)$. 令 $\omega^*=\mathrm{proj}_F^f(x_0)$. 由 $x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{(C_n\cap Q_n)}(x_0)$, 可得 $D_f(x_{n+1},x_0)\le D_f(\omega^*,x_0)$. 由引理 2.4, $x_n\to\omega^*$ 当 $n\to\infty$. 再由 $\|\bar{\omega}-\omega^*\|\le\|x_n-\bar{\omega}\|+\|x_n-\omega^*\|$, $\bar{\omega}=\omega^*$. 故，序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}_F^f(x_0)$. ▌

下面，我们将构造一类 Halpern 型迭代算法求解一可数族弱 Bregman 相对非扩张映像的公共不动点，并证明该算法的强收敛性.

定理 3.2 设 C 为实自反 Banach 空间 E 的非空闭凸子集， $f:E\to R$ 为 Legendre 且在 E 的有界集上为有界的，一致 Fréchet 可微，总体凸的， $\{T_n\}$ 为 C 到 C 的一可数族弱 Bregman 相对非扩张映像使得 $F=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F(T_n)\ne\emptyset$. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由如下算法生成

$$\begin{cases}x_0\in C,\ Q_0=C,\\ z_n=\nabla f^*(\beta_n\nabla f(x_0)+(1-\beta_n)\nabla f(T_n(x_n))),\\ y_n=\nabla f^*(\alpha_n\nabla f(z_n)+(1-\alpha_n)\nabla f(x_n)),\\ C_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:D_f(z,y_n)\le(1-\alpha_n\beta_n)D_f(z,x_n)+\alpha_n\beta_nD_f(z,x_0)\},\\ C_0=\{z\in C:D_f(z,y_0)\le D_f(z,x_0)\},\\ Q_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:\langle\nabla f(x_0)-\nabla f(x_n),z-x_n\rangle\le0\},\\ x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{(C_n\cap Q_n)}x_0,\quad\forall n\ge0,\end{cases}$$

其中， $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[0,1]$ 使得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\alpha_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}_F^f(x_0)$, 其中， $\mathrm{proj}_F^f(x_0)$ 为 x_0 到 F 的 Bregman 投影.

证 类似定理 3.1 的证明，可证得 F 为非空闭凸集，对任意 $n\ge0$, C_n 与 Q_n 为闭凸集且 $F\subseteq C_n\cap Q_n$. 故序列 $\{x_n\}$ 是有意义的. 因为 $F\subset Q_n$ 对任意 $n\ge0$, 类似定理 3.1 的证明，序列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 序列， $\{x_n\},\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 均为有界的并且

$$\lim_{n\to\infty}D_f(x_{n+1},x_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0.$$

设 $x_n\to\bar{\omega}\in C$.

下面，我们证明序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\bar{\omega}\in F=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F(T_n)$. 由 f 在 E 的有界子集上的一致 Fréchet 可微性以及引理 2.1, ∇f 在 E 的有界子集上为范数到范数的一致连续映像. 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|=0.$$

考虑到 $x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{(C_n\cap Q_n)}(x_0)\in C_n$, 我们有

$$D_f(x_{n+1},y_n)\le(1-\alpha_n\beta_n)D_f(x_{n+1},x_n)+\alpha_n\beta_nD_f(x_{n+1},x_0).$$

联合上式与 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, 令 $n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}D_f(x_{n+1},y_n)=0.$$

从而， $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-y_n\|=0$ 以及

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(y_n)\|=0.$$

由三角不等式 $\|x_n-y_n\|\le\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-y_n\|$, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$$

且 $y_n\to\bar\omega$. 因为

$$\begin{aligned}&\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(y_n)\|\\=&\|\nabla f(x_{n+1})-(\alpha_n\nabla f(z_n)+(1-\alpha_n)\nabla f(x_n))\|\\\ge&\alpha_n\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(z_n)\|-(1-\alpha_n)\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|\\\ge&\alpha_n(1-\beta_n)\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(T_nx_n)\|-\alpha_n\beta_n\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_0)\|\\&-(1-\alpha_n)\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|.\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}&\alpha_n(1-\beta_n)\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(T_nx_n)\|\\\le&\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(y_n)\|+\alpha_n\beta_n\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_0)\|+(1-\alpha_n)\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(x_n)\|.\end{aligned}$$

由于 $\liminf\limits_{n\to\infty}\alpha_n>0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, 对上式取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla f(x_{n+1})-\nabla f(T_nx_n)\|=0.$$

f 在 E 的有界子集上的一致 Fréchet 可微性与引理 2.1 表明 ∇f 和 ∇f^* 在 E 的有界子集上为范数到范数的一致连续函数．所以

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-T_nx_n\|=0.$$

由 $\|x_n-T_nx_n\|\le\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-T_nx_n\|$, 我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-T_nx_n\|=0$. 又因为 $x_n\to\bar\omega$ 以及 $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ 为一致闭的， $\bar\omega\in F=\bigcap\limits_{n=0}^\infty F(T_n)$. 余下的证明类似定理 3.1, 故序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}^f_F(x_0)$. ▌

在定理 3.2 中，取 $\alpha_n\equiv1$, 可得如下推论.

推论 3.1 设 C 为实自反 Banach 空间 E 的非空闭凸子集， $f:E\to R$ 为 Legendre 且在 E 的有界集上为有界的，一致 Fréchet 可微，总体凸的， $\{T_n\}$ 为 C 到 C 的一可数族弱

Bregman 相对非扩张映像使得 $F=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F(T_n)\neq\emptyset$. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由如下算法生成

$$\begin{cases} x_0\in C,\ Q_0=C,\\ y_n=\nabla f^*(\beta_n\nabla f(x_0)+(1-\beta_n)\nabla f(T_nx_n)),\\ C_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:D_f(z,y_n)\le(1-\beta_n)D_f(z,x_n)+\beta_nD_f(z,x_0)\},\\ C_0=\{z\in C:D_f(z,y_0)\le D_f(z,x_0)\},\\ Q_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:\langle\nabla f(x_0)-\nabla f(x_n),z-x_n\rangle\le 0\},\\ x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{C_n\cap Q_n}x_0,\quad \forall n\ge 0,\end{cases}$$

其中，$\{\beta_n\}\subset[0,1]$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 则序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}^f_F(x_0)$, 其中，$\mathrm{proj}^f_F(x_0)$ 为 x_0 到 F 的 Bregman 投影.

如果 $T_n\equiv T$ 对任意的 $n\ge 0$, 由推论 3.1 可知如下结论成立.

推论 3.2　设 C 为实自反 Banach 空间 E 的非空闭凸子集，$f:E\to R$ 为 Legendre 且在 E 的有界集上为有界的，一致 Fréchet 可微，总体凸的，T 为 C 到 C 的一弱 Bregman 相对非扩张映像使得 $F(T)\neq\emptyset$. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由如下算法生成

$$\begin{cases} x_0\in C,\ Q_0=C,\\ y_n=\nabla f^*(\beta_n\nabla f(x_0)+(1-\beta_n)\nabla f(Tx_n)),\\ C_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:D_f(z,y_n)\le(1-\beta_n)D_f(z,x_n)+\beta_nD_f(z,x_0)\},\\ C_0=\{z\in C:D_f(z,y_0)\le D_f(z,x_0)\},\\ Q_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:\langle\nabla f(x_0)-\nabla f(x_n),z-x_n\rangle\le 0\},\\ x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{C_n\cap Q_n}x_0,\quad \forall n\ge 0,\end{cases}$$

其中，$\{\beta_n\}\subset[0,1]$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}^f_{F(T)}(x_0)$.

现在，我们构造类似定理 3.2 的算法求解 Bregman 相对非扩张映像的不动点.

定理 3.3　设 C 为实自反 Banach 空间 E 的非空闭凸子集，$f:E\to R$ 为 Legendre 且在 E 的有界集上为有界的，一致 Fréchet 可微，总体凸的，T 为 C 到 C 的一弱 Bregman 相对非扩张映像使得 $F(T)\neq\emptyset$. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由如下算法生成

$$\begin{cases} x_0\in C,\ Q_0=C,\\ z_n=\bigtriangledown f^*(\beta_n\bigtriangledown f(x_0)+(1-\beta_n)\bigtriangledown f(Tx_n)),\\ y_n=\bigtriangledown f^*(\alpha_n\bigtriangledown f(z_n)+(1-\alpha_n)\bigtriangledown f(x_n)),\\ C_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:D_f(z,y_n)\le(1-\alpha_n\beta_n)D_f(z,x_n)+\alpha_n\beta_nD_f(z,x_0)\},\\ C_0=\{z\in C:D_f(z,y_0)\le D_f(z,x_0)\},\\ Q_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:\langle\nabla f(x_0)-\nabla f(x_n),z-x_n\rangle\le 0\},\\ x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{C_n\cap Q_n}x_0,\quad \forall n\ge 0,\end{cases}$$

其中，$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[0,1]$ 使得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\alpha_n>0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 则序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}^f_{F(T)}(x_0)$, 其中 $\mathrm{proj}^f_{F(T)}(x_0)$ 为 x_0 到 $F(T)$ 的 Bregman 投影.

证　证明类似定理 3.2, 故在此省略证明. ▮

如果定理 3.3 中 $\alpha_n\equiv 1$, 则定理 3.3 退化为了如下结论.

推论 3.3 设 C 为实自反 Banach 空间 E 的非空闭凸子集, $f:E\to R$ 为 Legendre 且在 E 的有界集上为有界的, 一致 Fréchet 可微, 总体凸的, T 为 C 到 C 的一弱 Bregman 相对非扩张映像使得 $F(T)\neq\emptyset,\{\beta_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的数列满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由如下算法生成

$$\begin{cases} x_0\in C,\ Q_0=C,\\ y_n=\triangledown f^*(\beta_n\triangledown f(x_0)+(1-\beta_n)\triangledown f(Tx_n)),\\ C_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:D_f(z,y_n)\leq(1-\alpha_n\beta_n)D_f(z,x_n)+\alpha_n\beta_nD_f(z,x_0)\},\\ C_0=\{z\in C:D_f(z,y_0)\leq D_f(z,x_0)\},\\ Q_n=\{z\in C_{n-1}\cap Q_{n-1}:\langle\nabla f(x_0)-\nabla f(x_n),z-x_n\rangle\leq 0\},\\ x_{n+1}=\mathrm{proj}^f_{C_n\cap Q_n}x_0,\quad\forall n\geq 0.\end{cases}$$

则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 强收敛于 $\mathrm{proj}^f_{F(T)}(x_0)$.

参 考 文 献

[1] Bregman L M. The relaxation method for finding common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. USSR Comput Math Math Phys, 1967, **7**: 200–217

[2] Alber Y I, Butnariu D. Convergence of Bregman projection methods for solving consistent convex feasibility problems in reflexive Banach spaces. J Optim Theory Appl, 1997, **92**: 33–61

[3] Bauschke H H, Borwein J M. Legendre functions and the method of random Bregman projections. J Convex Anal, 1997, **4**: 27–67

[4] Bauschke H H, Lewis A S. Dykstra's algorithm with Bregman projections: a convergence proof. Optim, 2000, **48**: 409–427

[5] Bauschke H H, Borwein J M, Combettes P L. Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces. Commun Contemp Math, 2001, **3**: 615–647

[6] Burachik R S. Generalized Proximal Point Methods for the Variational Inequality Problem [D]. Rio de Janeiro: Instituto de Mathematica Pura e Aplicada (IMPA), 1995

[7] Burachik R S, Scheimberg S. A proximal point method for the variational inequality problem in Banach spaces. SIAM J Control Optim, 2000, **39**: 1633–1649

[8] Butnariu D, Iusem A N. Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization. Applied Optimization, Vol 40. Dordrecht: Kluwer Academic, 2000

[9] Butnariu D, Iusem A N, Zalinescu C. On uniform convexity, total convexity and convergence of the proximal point and outer Bregman projection algorithms in Banach spaces. J Convex Anal, 2003, **10**: 35–61

[10] Butnariu D, Resmerita E. Bregman distances, totally convex functions, and a method for solving operator equations in Banach spaces. Abstr Appl Anal, 2006, **2006**: 1–39

[11] Eckstein I. Nonlinear proximal point algorithms using Bregman function, with applications to convex programming. Math Oper Res, 1993, **18**: 202–226

[12] Kiwiel K C. Proximal minimization methods with generalized Bregman functions. SIAM J Control Optim, 1997, **35**: 1142–1168

[13] Resmerita E. On total convexity, Bregman projections and stability in Banach spaces. J Convex Anal, 2004, **11**: 1–16

[14] Reich S, Sabach S. A strong convergence theorem for a proximal-type algorithm in reflexive Bnanch spaces. J Nonlinear Convex Anal, 2009, **10**: 471–485

[15] Reich S, Sabach S. Two strong convergence theorems for a proximal method in reflexive Bnanch spaces. Numer Funct Anal Optim, 2010, **31**: 22–44

[16] Reich S, Sabach S. Two strong convergence theorems for Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Bnanch spaces. Nonlinear Anal, 2010, **73**: 122–135

[17] Reich S, Sabach S. Existence and Approximation of Fixed Points of Bregman Firmly Nonexpansive Mappings in Reflexive Banach Spaces. Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering. New York: Springer, 2011: 299–314

[18] Reich S, Sabach S. A projection method for solving nonlinear problems in reflexive Bnanch spaces. J Fixed Point Theory Appl, doi:10.1007/s11784-010-0037-5

[19] Solodov M V, Svaiter B F. An inexact hybrid generalized proximal point algorithm and some new results on the theory of Bregman functions. Math Oper Res, 2000, **25**: 214–230

[20] Cholamjiak P, Cho Y J, Suantai S. Strong convergence theorems for Bregman relatively nonexpansive mappings in Banach spaces. under review

[21] Chen J W, Wan Z, et al. Approximation of fixed points of weak Bregman relatively nonexpansive mappings in Banach spaces. Int J Math Math Sci, 2011, **2011**: 1–23, doi:10.1155/2011/420192

[22] Chen J W, Cho Y J, Wan Z. Shrinking projection algorithms for equilibrium problems with a bifunction defined on the dual space of a Banach space. Fixed Point Theory Appl, 2011, **2011**: 91

[23] Chen J W, Wan Z, Zou Y. Strong convergence theorems for firmly nonexpansive-type mappings and equilibrium problems in Banach spaces. Optim, 2011: 626779

[24] Nakajo K, Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. J Math Anal Appl, 2003, **279**: 372–379

[25] Martinez-Yanes C, Xu H K. Strong convergence of the CQ method for fixed point iterative processes. Nonlinear Anal, 2006, **64**: 2400–2411

[26] Qin X, Su Y. Strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space. Nonlinear Anal, 2007, **67**: 1985–1965

[27] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1985

Convergence Analysis for Countable Family of Weak Bregman Relatively Nonexpansive Mappings

[1]Chen Jiawei [2]Wan Zhongping [3]Cho Yeol Je

([1]*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715;*
[2]*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072;*
[3]*Department of Mathematics Education and the RINS, Gyeongsang National University, Chinju 660-701, Korea*)

Abstract: A notion of countable family of weak Bregman relatively nonexpansive mappings is introduced in reflexive Banach space. We construct two iterative algorithms for finding a common fixed point of a countable family of weak Bregman relatively nonexpansive mappings in Banach spaces. Finally, the strong convergence of the proposed algorithms are also proved under appropriate conditions.

Key words: Strong convergence theorem; Bregman distance; Bregman projection; (weak) Bregman relatively nonexpansive map.

MR(2000) Subject Classification: 47H09; 47H10; 47J25